

ESERCIZIO 4 (Catene di Markov-1)

4. Si considerino le condizioni meteo per un certo numero di giorni come un processo stocastico con solo due possibili stati: 0/Sole e 1/Pioggia. Assumiamo per semplicità che il processo in questione sia una catena di Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con matrice di transizione:

$$\mathbf{P} : \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

1. Si calcoli la probabilità che un giorno di pioggia sia seguito da un giorno di sole.

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) = 0.2$$

2. Si calcoli la probabilità condizionata $\mathbb{P}(X_{62} = 1 | X_{61} = 0)$.

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = 0.2$$

3. Si calcoli la probabilità che un giorno di pioggia sia seguito da due giorni di sole.

$\mathbb{P}(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 1) = (\text{per Bayes}) = \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0, X_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1) =$
siccome il passo successivo dipende solo da quello precedente

$$= \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14$$

4. Si calcoli $\mathbb{P}(X_{62} = 1 | X_{60} = 0)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{62} = 1 | X_{60} = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 0) = \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \\ &= 0.3 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.45 \end{aligned}$$

5. Se venerdì c'è il sole, qual è la probabilità che la domenica seguente sia un giorno di sole?

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_0 = 0) &= \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0) = \\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.55 \end{aligned}$$