

Variabili Aleatorie Discrete - 2

Esercizio 4. Si consideri un canale di trasmissione con le seguenti caratteristiche:

1. si possono trasmettere solo due tipologie di messaggi: "0" e "1";
2. a causa di limiti di natura tecnica ogni messaggio viene corrotto con probabilità 0.2, ossia denotando con M il messaggio inviato e con T il messaggio effettivamente trasmesso si ha

$$\mathbb{P}(T = 1|M = 0) = \mathbb{P}(T = 0|M = 1) = 0.2$$

Per aumentare l'accuratezza del canale di trasmissione si sceglie di adottare il seguente protocollo di comunicazione:

1. per trasmettere il messaggio $M = 0$ viene inviato $M_{inviato} = 00000$ (5 volte consecutive "0") e, similmente, per trasmettere $M = 1$ si invia $M_{inviato} = 11111$;
2. il ricevente decodifica il contenuto del messaggio usando un voto a maggioranza, ossia denotando con T il messaggio effettivamente trasmesso e con R il messaggio decodificato si ha

$$T = 00010 \Rightarrow R = 0$$

$$T = 10101 \Rightarrow R = 1$$

$$T = 00011 \Rightarrow R = 0$$

Qual è la probabilità che $M \neq R$ usando questo protocollo di comunicazione?

Soluzione:

$$\mathbb{P}(M \neq R) = \mathbb{P}(\text{"sbaglio 3, 4 o 5 volte"})$$

$$\mathbb{P}(\text{"sbagliare"}) = 0,2$$

$$\mathbb{P}(\text{"non sbagliare"}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$X = \text{"numero di volte in cui sbaglio"}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M \neq R) = \mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = (0,2)^3(0,8)^2 \binom{5}{3} = \frac{32}{625} = 0,0512$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = (0,2)^4(0,8)^1 \binom{5}{4} = \frac{4}{625} = 0,0064$$

$$\mathbb{P}(X = 5) = (0,2)^5(0,8)^0 \binom{5}{5} = \frac{1}{3125} = 0,00032$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(M \neq R) = 0,0512 + 0,0064 + 0,00032 = 0,05792$$