

Variabili aleatorie discrete - 1

Simone Pauletto
Elia Dal Tin

16 aprile 2017

Esercizio 5. Ogni sera i diversi metereologi, confidando nelle conoscenze matematiche degli italiani, comunicano durante i telegiornali la probabilità che piovano il giorno successivo. Vogliamo stabilire qual è il miglior metereologo secondo lo schema che segue: se un metereologo sostiene che domani pioverà con probabilità p gli daremo un punteggio pari a:

- $1 - (1 - p)^2$ se effettivamente piove;
- $1 - p^2$ se alla fine non piove.

Terremo nota dei punteggi per un certo periodo di tempo (un mese) e incoroneremo *miglior metereologo* chi otterrà il punteggio medio più alto. Il colonnello Petrucci, uomo ingegnoso, è venuto a conoscenza del nostro schema e sta lavorando ad un sistema che gli permetta di massimizzare il suo *punteggio atteso*. Decide di procedere come segue: se è convinto che domani pioverà con probabilità p_1 annuncerà al telegiornale che pioverà con probabilità p_2 . Qual è p_2 , in funzione di p_1 , assumendo che il colonnello Petrucci stia seguendo la strategia ottimale per massimizzare il proprio punteggio atteso?

Soluzione: Chiamiamo X la variabile aleatoria che tiene conto del punteggio assegnato. Questa assume i valori $1 - (1 - p)^2$ e $1 - p^2$ rispettivamente con probabilità p e $1 - p$. Possiamo quindi calcolare il punteggio medio:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum x \cdot P(x) = \\ &= \left[1 - (1 - p)^2\right] \cdot p + (1 - p^2) \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

Consideriamo ora il sistema del colonnello Petrucci, i valori della variabile aleatoria che tiene conto del suo punteggio diventano quindi $1 - (1 - p_2)^2$ e $1 - p_2^2$ e le relative probabilità diventano rispettivamente p_1 e $1 - p_1$. Calcoliamo quindi il punteggio medio:

$$\begin{aligned} E[X] &= \left[1 - (1 - p_2)^2\right] \cdot p_1 + (1 - p_2^2) \cdot (1 - p_1) = \\ &= \left[1 - (1 + p_2^2 - 2p_2)\right] \cdot p_1 + 1 - p_2^2 - p_1 + p_1 p_2^2 = \\ &= (1 - 1 - p_2^2 + 2p_2) \cdot p_1 + 1 - p_2^2 - p_1 + p_1 p_2^2 = \\ &= -p_1 p_2^2 + 2p_2 p_1 + 1 - p_2^2 - p_1 + p_1 p_2^2 = \\ &= -p_2^2 + 2p_2 p_1 - p_1 + 1 \end{aligned}$$

Abbiamo ricavato quindi il punteggio medio in funzione di p_2 . Chiameremo tale funzione f . Per verificare qual é p_2 in funzione di p_1 che deve dichiarare il colonnello Petrucci per massimizzare il proprio punteggio atteso calcoliamo la derivata e cerchiamo dove essa si annulla:

$$f'(p_2) = -2p_2 + 2p_1$$

É facile verificare che tale funzione si annulla quando $p_2 = p_1$. Questo ci porta a concludere che il sistema con il quale valutiamo i metereologi é corretto in quanto il colonnello massimizza il proprio punteggio quando dichiara la probabilità con la quale egli é convinto che piova.