Esercizi 5,6,7 Catene di Markov

Augusto Del Zotto

22 aprile 2017

Esercizio 5 Determinare tutte le misure di probabilità invarianti della seguente matrice di transizione:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Sia $\mu = (a, b, c)$ una misura di probabilità invariante per Q, allora $\mu Q = \mu$ e $a + b + c = 1$. Da cui il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}c = a \\ \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{2}c = b \\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è unica ed è $\mu = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ □

Esercizio 6 Si consideri la seguente catena di Markov a due stadi con matrice di transizione:

$$Q = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Determinare $Q^{(n)}(1, 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Suppongo che gli stati siano $S = \{1, 2\}$ Ricordando che vale $Q^{(n)} = Q^n$ dove Q^n indica la potenza n-esima della matrice Q, non resta che calcolare $Q^n(1,1)$ in funzione di n

$$\begin{aligned}
Q^n(1,1) &= \sum_{h=1}^{2} Q(h,1)Q^{n-1}(1,h) = \\
&= Q(1,1)Q^{n-1}(1,1) + Q(2,1)Q^{n-1}(1,2) = \\
&= (1-\alpha)\, Q^{n-1}(1,1) + \beta Q^{n-1}(1,2)
\end{aligned}$$

Poiché Q è stocastica, lo sono anche le Q^k $\forall k \in \mathbb{N}$, in particolare

$$Q^k(1,1) + Q^k(1,2) = 1$$

sostituendo quindi ottengo

$$Q^n(1,1) = (1-\alpha)\, Q^{n-1}(1,1) + \beta \left(1 - Q^{n-1}(1,1)\right)$$

da cui si ricava la seguente successione per ricorsione, dove $Q^n(1,1) = a_n$:

$$\begin{cases} a_1 = 1 - \alpha \\ a_n = (1-\alpha-\beta)\, a_{n-1} + \beta \end{cases}$$

Esplicitando infine il termine n-esimo in funzione di n si ottiene

$$a_n = Q^n(1,1) = (1-\alpha)\,(1-\alpha-\beta)^{n-1} + \beta \left(\frac{(1-\alpha-\beta)^{n-1} - 1}{(1-\alpha-\beta) - 1} \right)$$

□

Esercizio 7 Riassumendo il testo ci sono N ceppi di un virus, che ha probabilità α di cambiare ceppo dopo ogni replicazione e di scegliere un secondo ceppo in maniera equiprobabile tra gli altri. Si chiede la probabilità che il ceppo originario (generazione 0) coincida con il ceppo della n-esima generazione.

Dimostrazione. Come nell'esercizio precedente schematizzo il problema come un catena di Markov a N stadi (i vari ceppi).
Dalle ipotesi si ha che $Q(i,i) = 1 - \alpha$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$ in quanto la probabilità di cambiare ceppo è α.
Inoltre si ha che $Q(i,j) = \frac{\alpha}{N-1}$ per ogni $i \neq j \in \{1, \ldots, N\}$ poiché la scelta

di un nuovo ceppo è equiprobabile.
La matrice di transizione risulta quindi essere:

$$Q = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{\alpha}{N-1} \\ \frac{\alpha}{N-1} & \cdots & \cdots & \frac{\alpha}{N-1} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Poiché i vari stadi sono indistinguibili uno dall'altro e hanno tutti le stesse caratteristiche posso dedurre che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Q^n(1,1) = Q^n(2,2) = \cdots = Q^n(N-1,N-1) = Q^n(N,N)$$

Analogamente a prima ottengo quindi:

$$\begin{aligned} Q^n(i,i) &= \sum_{h=1}^{N} Q(h,i)Q^{n-1}(i,h) = \\ &= (1-\alpha)Q^{n-1}(i,i) + \sum_{h\neq i, h=1}^{N} Q(h,i)Q^{n-1}(i,h) = \\ &= (1-\alpha)Q^{n-1}(i,i) + \frac{\alpha}{N-1} \sum_{h\neq i, h=1}^{N} Q^{n-1}(i,h) = \\ &= (1-\alpha)Q^{n-1}(i,i) + \frac{\alpha}{N-1} \left(1 - Q^{n-1}(i,i)\right) = \\ &= \frac{\alpha}{N-1} + Q^{n-1}(i,i)\left(1 - \alpha - \frac{\alpha}{N-1}\right) = \\ &= \frac{\alpha}{N-1} + Q^{n-1}(i,i)\left(1 - \alpha\frac{N}{N-1}\right) \end{aligned}$$

Risolvendo la ricorrenza come prima si ottiene:

$$Q^n(i,i) = (1-\alpha)\left(1-\alpha\frac{N}{N-1}\right)^{n-1} + \frac{\alpha}{N-1}\left(\frac{\left(1-\alpha\frac{N}{N-1}\right)^{n-1} - 1}{\left(1-\alpha\frac{N}{N-1}\right) - 1}\right)$$

□