Esercizi di probabilità e statistica

Catene di Markov - 2

Luca Palmieri

7 Aprile 2017

Esercizio 1. Consideriamo una popolazione di conigli.
Un certo gene si presenta in due tipologie (o *alleli*): g e G.
Il genotipo di ogni coniglio contiene una coppia di alleli relativi a questo genere. Possiamo avere conigli GG (dominanti), Gg (ibridi, l'ordine non conta - gG e Gg sono identici) o gg (recessivi).
Quando due conigli si accoppiano la progenie eredita un allele da ciascuno dei due genitori, con eguale probabilità. Quindi, se incrociamo un dominante (GG) con un ibrido(Gg) la prole sarà dominante con probabilità 1/2 o ibrida con probabilità 1/2.
Si consideri la seguente procedura: inziamo con un coniglio con un certo genotipo (GG, Gg o gg) e lo incrociamo con un ibrido; la prole è di nuovo incrociata con un ibrido e così a seguire per le generazioni successive - i coniglietti si accoppiano sempre con un coniglio ibrido.

(i) Scrivere la matrice di transizione della catena di Markov che descrive la procedura adottata;

(ii) Si assuma che il primo coniglio è a sua volta un ibrido. Sia μ_n la distribuzione di probabilità che descrive al passo n qual è la probabilità che un coniglio dell'n-sima generazione sia dominante ($\mu_n(GG)$), ibrido ($\mu_n(Gg)$) o recessivo ($\mu_n(gg)$). Calcolare μ_1, μ_2 e μ_3. Riuscite a trovare una formula generale per esprimere μ_n?

Esercizio 2. Jack è in prigione e ha in tasca 3 euro. Per 8 euro un altro detenuto gli lascia fare una chiamata con il suo cellulare, di cui le guardie carcerarie non sono a conoscenza.
Jack riesce a convincere una guardia a giocare d'azzardo con lui.
Se Jack scommette n vince n con probabilità 0.4 e perde n con probabilità 0.6.
Calcola la probabilità che Jack vinca 8 euro prima di perdere tutti i suoi soldi se:

(i) scommette 1 euro ad ogni giocata (strategia timida);

(ii) scommette ogni volta il massimo a sua disposizione, ma non più del necessario per arrivare a 8 euro (strategia aggressiva);

Quale delle due strategie dà a Jack le migliori chance di procurarsi quella chiamata?

Esercizio 3. Un giocatore ha un capitale di 2mila euro e ha bisogno di raggiungere un capitale di 10mila euro in tempi brevi.
Sceglie di partecipare al gioco seguente: viene lanciata una moneta equilibrata; se il giocatore scommette sul lato corretto vince una somma pari alla somma puntata, altrimenti perde la cifra puntata.
Il giocatore sceglie di usare una strategia aggressiva: se il suo capitale scende sotto i 5mila euro allora scommetterà tutto il denaro a sua disposizione sul prossimo lancio, altrimenti scommette la cifra necessaria a fargli raggiungere, in caso di vittoria, quota 10mila euro.
Sia $X_0 = 2$ il suo capitale iniziale e sia X_n il suo capitale dopo n lanci.
Si dimostri che il giocatore riuscirà nell'impresa con probabilità pari ad $\frac{1}{5}$.
Qual è il numero medio di giocate necessarie affinchè il giocatore raggiunga il suo obiettivo o finisca in bancarotta?

Esercizio 4. Una moneta bilanciata è lanciata ripetutamente. L'esito di ogni lancio è indipendente dall'esito dei lanci precedenti.
Calcolare il numero atteso di lanci prima che compaia la sequenza *Croce-Testa-Croce*.
Esempio: se consideriamo una sequenza di lanci come $CTTCCCTTCTC$ ci sono voluti 11 lanci per ottenere la sequenza CTC. Quanti lanci ci vogliono in media? Si può formulare - e risolvere - il problema usando le catene di Markov?

Esercizio 5. Sia $\{X_n\}_n$ una catena di Markov con spazio degli stati $S = \{0, \dots, N\}$ e probabilità di transizione:

$$p_{i,\,i+1} = a \qquad i \in \{1, \dots, N-1\} \tag{1}$$
$$p_{i,\,i-1} = 1 - a \qquad i \in \{1, \dots, N-1\} \tag{2}$$
$$p_{0,\,1} = 1 \tag{3}$$
$$p_{N,\,N-1} = 1 \tag{4}$$

dove $a \in [0, 1]$.

(i) Si disegni il grafo corrispondente alla catena di Markov in esame.

(ii) La catena è irriducibile?

(iii) La catena è aperiodica? Se così non fosse, qual è il periodo della catena?

(iv) Si trovi la distribuzione stazionaria.

Esercizio 6. Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la catena di Markov dell'Esercizio 12 in "Catene di Markov - 1". Qual è la probabilità di assorbimento in 4 partendo da 2?