

Università degli Studi di Trieste  
Facoltà di Ingegneria

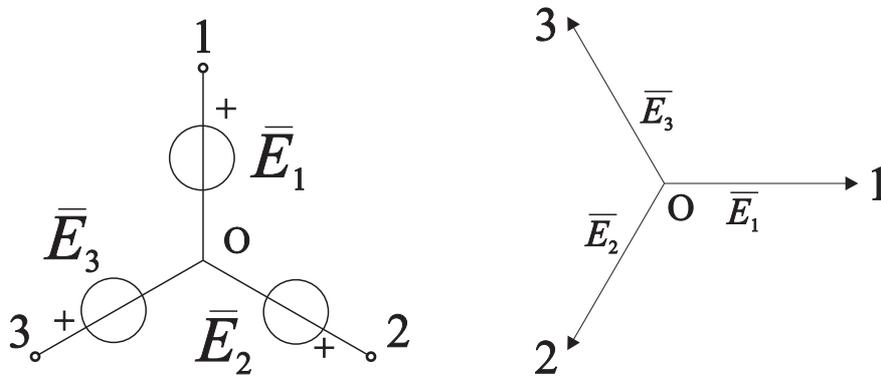
APPUNTI del CORSO di  
ELETTROTECNICA

*Trifase*

a.a. 2016-2017

## Generatore trifase

- Un generatore trifase equilibrato è composto da 3 generatori monofase collegati a stella o a triangolo, aventi la stessa ampiezza e sfasati tra loro di  $2\pi/3$  rad.



- Le tensioni  $\mathbf{E}$  sono chiamate stellate o di fase, le  $\mathbf{V}$  concatenate o di linea
- La relazione tra i fasori di una terna diretta o destrorsa (verso orario di rotazione) sono:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E_1 \\ \bar{E}_2 = \bar{E}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \bar{E}_3 = \bar{E}_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \bar{E}_1 e^{-j\frac{4}{3}\pi} = \bar{E}_1 e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

## *Generatore trifase (2)*

- Una terna inversa o sinistrorsa ruota in senso anti-orario
- Noi faremo riferimento sempre a terne destrorse
- Per distinguere le due terne in una presa trifase reale, si prende un morsetto a caso come riferimento di fase (morsetto 1) e si numerano gli altri in modo che lo sfasamento sia di volta in volta di  $-2\pi/3$
- In pratica si prendono 3 fili a caso, si numerano e si verifica il verso di rotazione. Se è sbagliato, basta invertire tra loro 2 fili qualsiasi

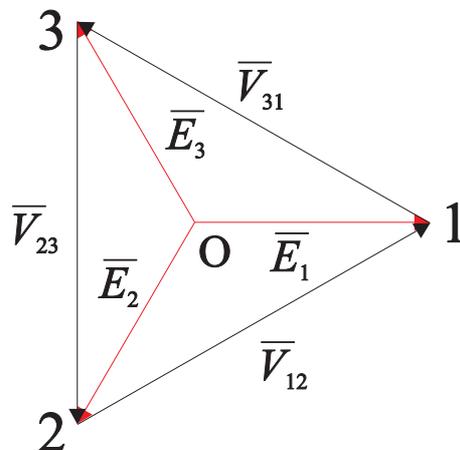
## Tensioni concatenate

- La tensioni concatenate sono prese ai morsetti per cui

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \\ \bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \\ \bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \end{cases}$$

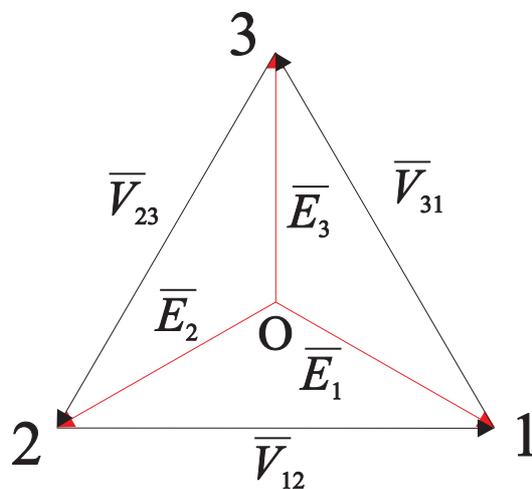
- La relazione diretta tra le due terne è ( $\mathbf{E}_1$  riferimento di fase)

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = \sqrt{3} E_1 e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \bar{V}_{23} = \sqrt{3} \bar{E}_2 e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E_1 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \bar{V}_{12} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \bar{V}_{31} = \sqrt{3} \bar{E}_3 e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} E_1 e^{j\frac{5}{6}\pi} = \bar{V}_{23} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$



## Riferimento di fase

- A seconda dei casi, prenderemo come riferimento di fase o la tensione di fase  $\mathbf{E}_1$ , o la tensione concatenata  $\mathbf{V}_{12}$ . In questo secondo caso il triangolo delle alimentazioni risulta ruotato “rigidamente” di  $\pi/6$  rad

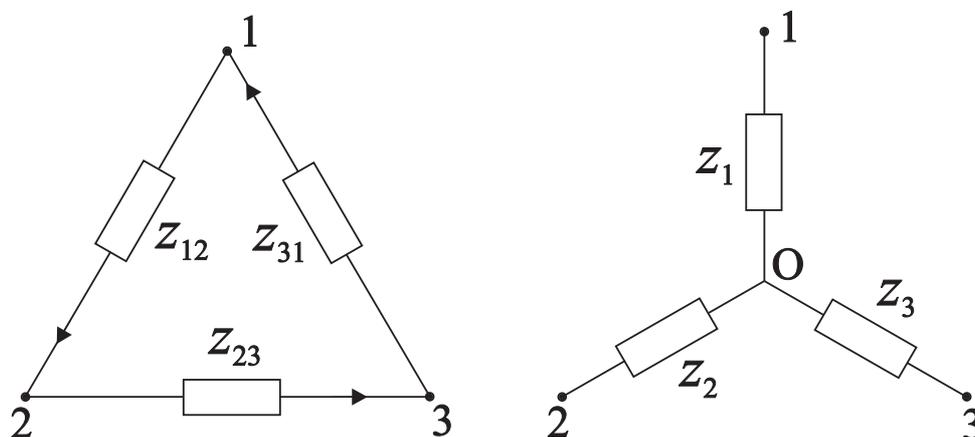


## *Carichi trifase*

- Un carico trifase (in un sistema senza neutro) ha tre morsetti
- Può essere rappresentato con una terna di resistenze connesse a “stella” o a “triangolo”
- Per ogni carico trifase, si può trovare una rappresentazione a stella e una a triangolo “equivalenti” tra loro (dal punto di vista del circuito esterno), nel senso che le tensioni e le correnti del circuito esterno non cambiano

## Trasformazioni triangolo-stella

- Tre resistenze a triangolo possono essere “trasformate” in tre resistenze a stella, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



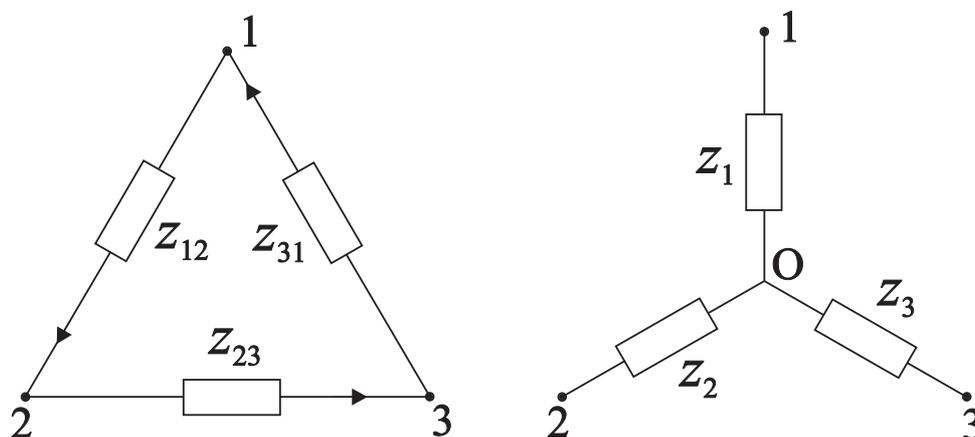
$$z_1 = \frac{z_{12}z_{13}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_1 = y_{12} + y_{13} + \frac{y_{12}y_{13}}{y_{23}}$$

$$z_2 = \frac{z_{12}z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_2 = y_{12} + y_{23} + \frac{y_{12}y_{23}}{y_{13}}$$

$$z_3 = \frac{z_{13}z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_3 = y_{13} + y_{23} + \frac{y_{13}y_{23}}{y_{12}}$$

## Trasformazioni stella-triangolo

- Tre resistenze a stella possono essere “trasformate” in tre resistenze a triangolo, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



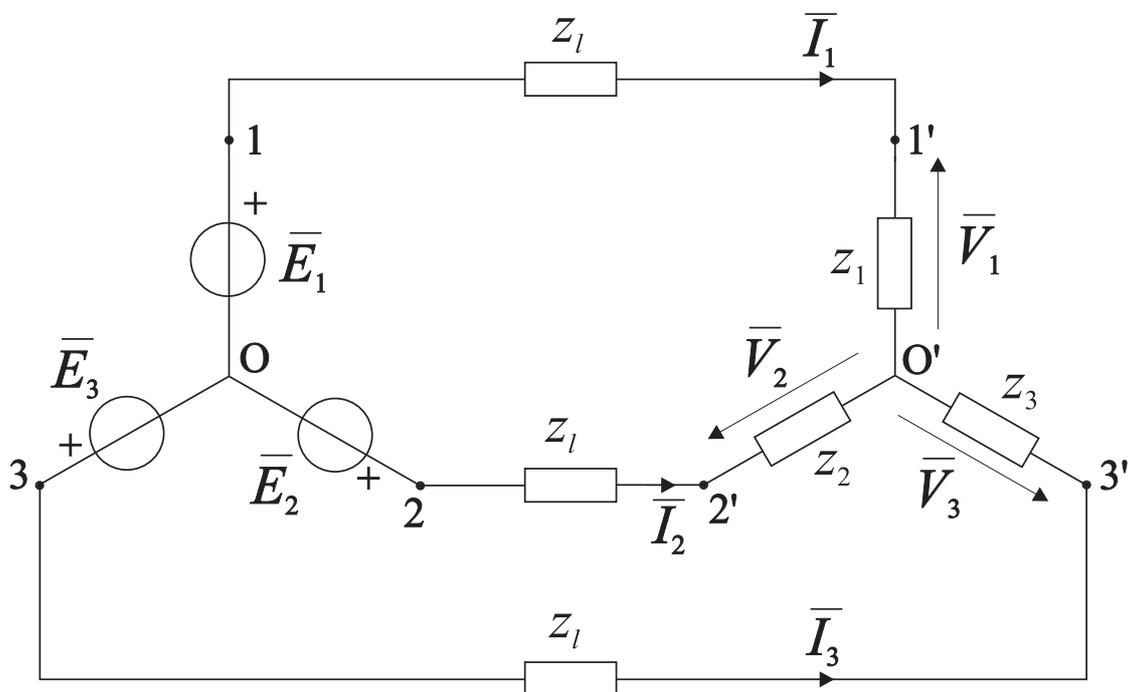
$$y_{23} = \frac{y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{23} = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$$

$$y_{13} = \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{13} = z_1 + z_3 + \frac{z_1 z_3}{z_2}$$

$$y_{12} = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

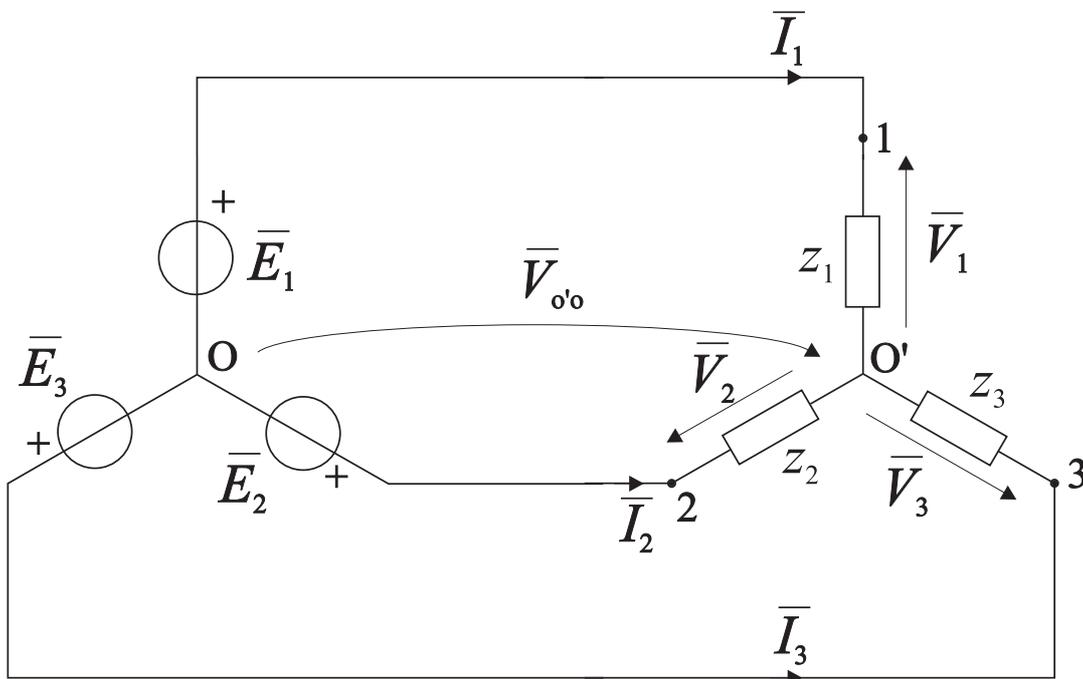
## Sistemi trifase

- Un sistema trifase è composto da un generatore trifase, da una linea di alimentazione (trifase) e da un carico (trifase) collegato a stella o a triangolo. Se le impedenze sono diverse tra loro, il carico si dice squilibrato, altrimenti equilibrato



## Sistemi squilibrati a stella

- Consideriamo un generatore trifase e un carico squilibrato a stella (trascuriamo le impedenze di linea  $z_l$ )



$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{V}_{O'O} + \bar{V}_1 \\ \bar{E}_2 = \bar{V}_{O'O} + \bar{V}_2 \\ \bar{E}_3 = \bar{V}_{O'O} + \bar{V}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V}_1 = z_1 \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 = z_2 \bar{I}_2 \\ \bar{V}_3 = z_3 \bar{I}_3 \end{cases}$$

## Sistemi squilibrati a stella (2)

- Calcoliamo la ddp tra i centri stella con il teorema di Millmann

$$\bar{V}_{o'o} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{z_1} + \frac{\bar{E}_2}{z_2} + \frac{\bar{E}_3}{z_3}}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}}$$

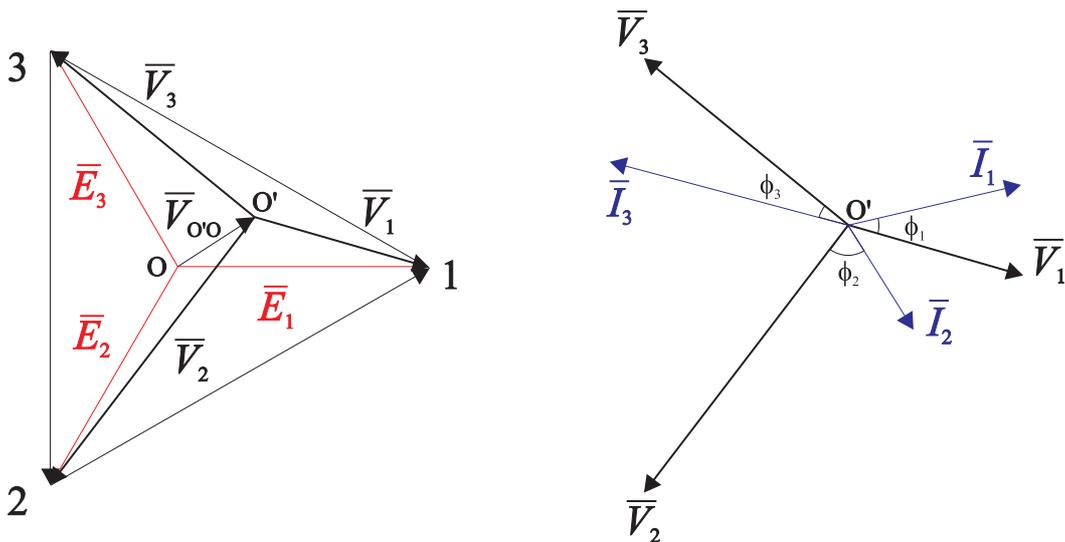
- Le correnti in un carico squilibrato sono pertanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{z_1} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{o'o}}{z_1} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{z_2} = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_{o'o}}{z_2} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{z_3} = \frac{\bar{E}_3 - \bar{V}_{o'o}}{z_3} \end{array} \right.$$

## Posizione dei centri stella

- Il centro stella  $O'$  del carico si sposta dal centro stella  $O$  del generatore tanto più il carico è squilibrato.
- Le correnti formano una terna di fasori squilibrati con somma nulla per IK

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$



## *Carichi equilibrati a stella*

- In caso di carico equilibrato:

$$z = z_1 = z_2 = z_3$$

- Per la proprietà fondamentale di una terna equilibrata

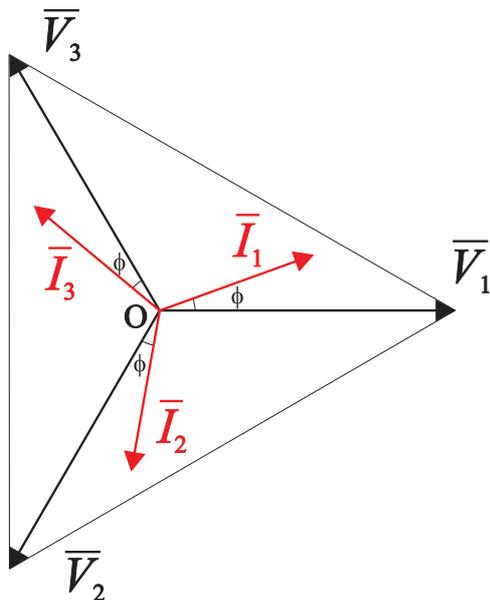
$$\cos x + \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = 0 \quad \forall x$$

$$\rightarrow \mathbf{V}_{O'O} = 0 \text{ V}$$

- Ovvero i centri stella coincidono

## Carichi equilibrati a stella (2)

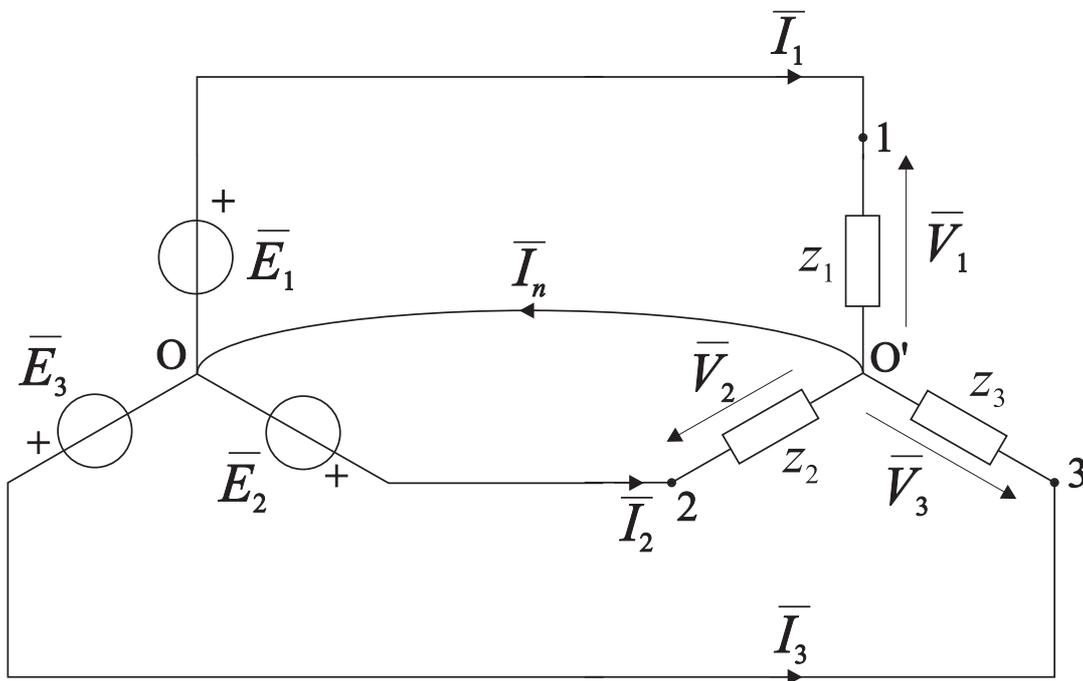
- Le tensioni sui carichi  $\mathbf{V}_k$  coincidono con le tensioni di fase  $\mathbf{E}_k$
- Le correnti allora formano anch'esse una terna equilibrata e sono sfasate rispetto alle tensioni della fase  $\phi$  dell'impedenza  $z$ .



$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{V}_1 / z \\ \bar{I}_2 = \bar{I}_1 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ \bar{I}_3 = \bar{I}_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

## Sistemi squilibrati a stella con neutro

- Per mantenere equilibrate le tensioni sul carico, si inserisce un quarto cavo detto “neutro”



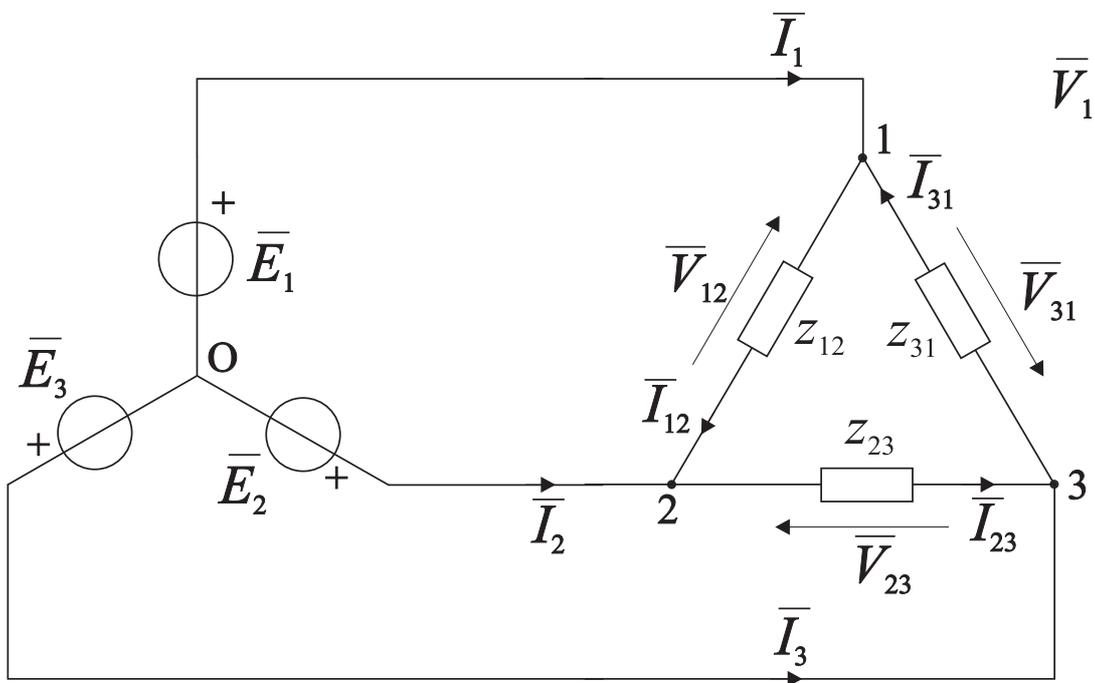
- $\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1$  ,  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2$  ,  $\mathbf{V}_3 = \mathbf{E}_3$
- Le correnti restano squilibrate e si ha

$$\bar{I}_n = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

- In caso di carico equilibrato,  $\mathbf{I}_n = 0$

## Sistemi squilibrati a triangolo

- Un carico a triangolo può essere squilibrato o equilibrato ( $z = z_{12} = z_{23} = z_{31}$ )
- Le tensioni concatenate sono equilibrate per definizione, le correnti sono equilibrate solo in caso di carico equilibrato
- Nei sistemi senza neutro, i carichi a triangolo e a stella sono equivalenti per la “ben nota” trasformazione



## Sistemi squilibrati a triangolo (2)

- Le correnti si calcolano

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} \\ \bar{I}_2 = \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_3 = \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} \end{cases}$$

- E quindi considerando le tensioni concatenate

$$\begin{cases} \bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{z_{12}} \\ \bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{z_{23}} \\ \bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{z_{31}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{12}}{z_{12}} - \frac{\bar{V}_{31}}{z_{31}} \\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{23}}{z_{23}} - \frac{\bar{V}_{12}}{z_{12}} \\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{31}}{z_{31}} - \frac{\bar{V}_{23}}{z_{23}} \end{cases}$$

## *Carichi equilibrati*

- La trasformazione stella-triangolo (sistema senza neutro) e viceversa è molto semplice, in quanto

$$z_{\text{TRIANGOLO}} = 3z_{\text{STELLA}}$$

- Un carico equilibrato si comporta sempre nello stesso modo, sia esso rappresentato da una stella o da un triangolo
- Le tensioni sulle impedenze e le correnti di linea sono equilibrate
- È conveniente utilizzare la stella per calcolare le correnti di linea
- In ogni caso, trovata una corrente, le altre si possono calcolare per sfasamento di  $2\pi/3$

## Potenza in un sistema trifase

- In generale per un carico a stella (con o senza neutro) senza impedenza di linea

$$\begin{aligned} P_c &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* = \\ &= P_{c1} + P_{c2} + P_{c3} \end{aligned}$$

- Con il neutro si ha:

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1, \bar{V}_2 = \bar{E}_2, \bar{V}_3 = \bar{E}_3$$

- In generale per un carico a triangolo senza impedenza di linea

$$\begin{aligned} P_c &= \bar{V}_{12} \bar{I}_{12}^* + \bar{V}_{23} \bar{I}_{23}^* + \bar{V}_{31} \bar{I}_{31}^* \\ &= P_{c12} + P_{c23} + P_{c31} \end{aligned}$$

N.B. non sono le correnti di linea, in quanto queste non scorrono sulle impedenze del carico

## Potenza in un carico equilibrato

- Se il carico è equilibrato a stella o a triangolo (senza impedenza di linea), le tensioni e le correnti sono equilibrate, quindi hanno lo stesso modulo, per cui

$$|\bar{E}_1| = |\bar{E}_2| = |\bar{E}_3| = E_f$$

$$|\bar{I}_1| = |\bar{I}_2| = |\bar{I}_3| = I_L$$

$$z = |z|e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned} P_{c1} &= E_f I_L \cos \varphi + j E_f I_L \sin \varphi = \\ &= P_1 + jQ_1 = P_{c2} = P_{c3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P = 3 E_f I_L \cos \varphi \\ Q = 3 E_f I_L \sin \varphi \end{cases}$$

## *Potenza in un carico equilibrato (2)*

- Oppure con le tensioni concatenate o di linea

$$|\bar{V}_{12}| = |\bar{V}_{23}| = |\bar{V}_{31}| = V_L$$
$$V_L = \sqrt{3}E_f$$

$$\begin{cases} P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \\ Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi \end{cases}$$

- Queste espressioni possono essere usate sia con un carico a triangolo, sia con un carico a stella, dal momento che la fase  $\varphi$  dell'impedenza non cambia con la relativa trasformazione

## *Potenza istantanea in un carico equilibrato*

- Le potenze istantanee in un carico equilibrato a stella sono

$$p_1(t) = P_1 + P_1 \cos(2\omega t + 2\varphi_{V1}) + Q_1 \sin(2\omega t + 2\varphi_{V1})$$

$$p_2(t) = P_2 + P_2 \cos(2\omega t + 2\varphi_{V2}) + Q_2 \sin(2\omega t + 2\varphi_{V2})$$

$$p_3(t) = P_3 + P_3 \cos(2\omega t + 2\varphi_{V3}) + Q_3 \sin(2\omega t + 2\varphi_{V3})$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$$

- Se il carico è equilibrato

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_a$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_r$$

$$\varphi_{V2} = \varphi_{V1} - 2\pi/3, \varphi_{V3} = \varphi_{V1} - 4\pi/3$$

- La potenza istantanea complessiva è quindi

$$p(t) = 3 P_a$$

## *Rifasamento*

- Il rifasamento di un carico trifase segue lo stesso principio del corrispondente monofase
- Si deve annullare la potenza reattiva del carico
- Supponendo che il carico sia induttivo, si procederà al rifasamento ponendo in parallelo 3 condensatori connessi a stella o a triangolo
- Per le relazioni esistenti tra le impedenze connesse a stella o a triangolo, la configurazione a triangolo permette di utilizzare condensatori di capacità minore, quindi meno costosi

## *Carichi a stella equivalenti*

- Consideriamo un carico a stella squilibrato senza neutro che assorbe le correnti di linea  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  e  $\mathbf{I}_3$  ed è alimentato con le tensioni concatenate  $\mathbf{V}_{12}$ ,  $\mathbf{V}_{23}$  e  $\mathbf{V}_{31}$ . Vogliamo determinare le impedenze del carico a stella

$$\begin{cases} \bar{V}_{12} = z_1 \bar{I}_1 - z_2 \bar{I}_2 \\ \bar{V}_{23} = z_2 \bar{I}_2 - z_3 \bar{I}_3 \end{cases}$$

- 2 equazioni, 3 incognite, per cui una impedenza può essere scelta a piacere, per esempio la  $z_1$ . Essendo complessa, corrisponde a  $\infty^2$  soluzioni, ovvero  $\infty^2$  stelle “equivalenti” che, alimentate con la stessa terna di tensioni concatenate, assorbono le stesse correnti

## *Teorema di Aron*

- Teorema di Aron: in un sistema trifase puro (anche dissimmetrico e squilibrato), la potenza complessa (così come la potenza istantanea) può essere calcolata valutando le tensioni di fase rispetto ad un riferimento qualsiasi  $O'$  (teorema di Aron o della invarianza della potenza rispetto al centro stella).
- Le stelle equivalenti differiscono per la posizione del centro stella del carico  $O'$  e, quindi, per le tensioni  $\mathbf{V}_k$  di fase (del carico)

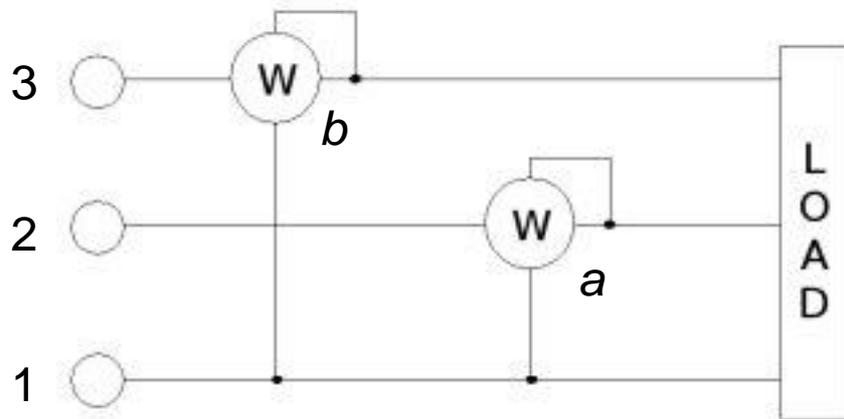
## Teorema di Aron (2)

- Queste stelle assorbono la stessa potenza  $P_c$  che è invariante rispetto allo spostamento di  $O'$

$$\begin{aligned}
 P_c &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* \\
 \begin{cases} \bar{V}_1'' = \bar{V}_1 - \bar{V}_{O''O'} \\ \bar{V}_2'' = \bar{V}_2 - \bar{V}_{O''O'} \\ \bar{V}_3'' = \bar{V}_3 - \bar{V}_{O''O'} \end{cases} \\
 P_c'' &= \bar{V}_1'' \bar{I}_1^* + \bar{V}_2'' \bar{I}_2^* + \bar{V}_3'' \bar{I}_3^* = \\
 &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* - \\
 &\quad - \bar{V}_{O''O'} \underbrace{(\bar{I}_1^* + \bar{I}_2^* + \bar{I}_3^*)}_{= 0} = P_c
 \end{aligned}$$

## Inserzione Aron

- E' un metodo di misura della potenza elettrica di un sistema trifase tramite l'utilizzo di due soli wattmetri



$$\begin{aligned}
 P_c &= \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* \\
 \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 &= 0 \Rightarrow \bar{I}_1 = -\bar{I}_2 - \bar{I}_3 \\
 P_c &= \bar{V}_1 (-\bar{I}_2^* - \bar{I}_3^*) + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* + \bar{V}_3 \bar{I}_3^* = \\
 &= (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \bar{I}_2^* + (\bar{V}_3 - \bar{V}_1) \bar{I}_3^* = \\
 &= \bar{V}_{21} \bar{I}_2^* + \bar{V}_{31} \bar{I}_3^* \\
 \Rightarrow P &= \Re\{P_c\} = W_a + W_b
 \end{aligned}$$

- Per i sistemi equilibrati vale anche

$$Q = \sqrt{3}(W_a - W_b)$$