

Università degli Studi di Trieste  
Facoltà di Ingegneria

APPUNTI del CORSO di  
ELETTROTECNICA

*Mutue induttanze*  
*Circuiti magnetici*

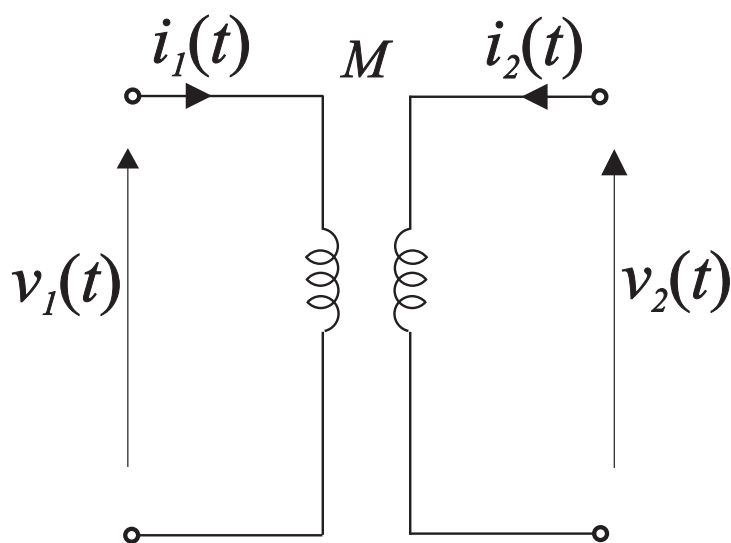
a.a. 2016-2017

## *Mutua induttanza*

- È un componente dinamico a due porte conservativo (del II ordine)

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- $L_1 > 0$ : induttanza primaria [H]
- $L_2 > 0$ : induttanza secondaria [H]
- $M$ : mutua induttanza [H]



## *Mutua induttanza (2)*

- Rappresentazione differenziale

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1(0^-) = I_1, \quad i_2(0^-) = I_2$$

- Rappresentazione integrale

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t v_1(\tau) d\tau \\ \int_{0^-}^t v_2(\tau) d\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- Con Steinmetz

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

## *Mutua induttanza (3)*

- L'energia immagazzinata è

$$E(t) = \frac{L_1 i_1^2(t) + L_2 i_2^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- È una forma quadratica che deve essere semi-definita positiva, ovvero maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore delle correnti. Quindi si ha:

$$L_1 L_2 \geq M^2$$

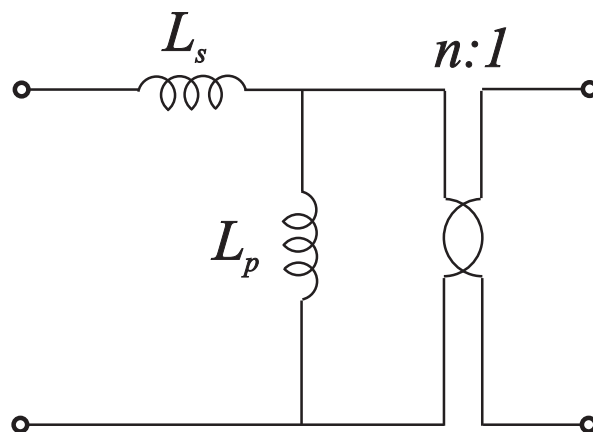
- Inoltre la matrice deve essere simmetrica altrimenti il differenziale della potenza  $p(\tau)d\tau$  non sarebbe esatto.

## Mutua induttanza (4)

- Si definisce come coefficiente di accoppiamento  $k$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad -1 \leq k \leq 1$$

- Un modello equivalente è



$$n = \frac{M}{L_2}, \quad L_p = \frac{M^2}{L_2} = k^2 L_1,$$

$$L_s = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = (1 - k^2) L_1$$

## *Mutua induttanza (5)*

- Nel caso in cui  $k = 1$ , si ha che:

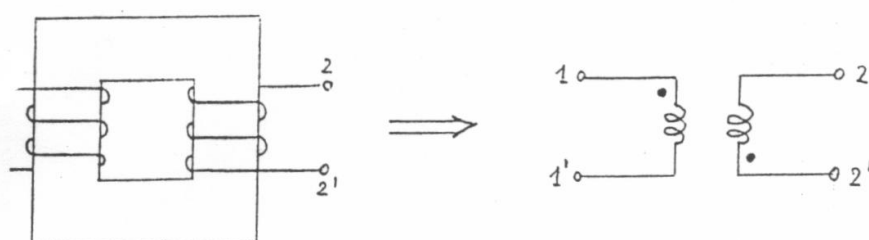
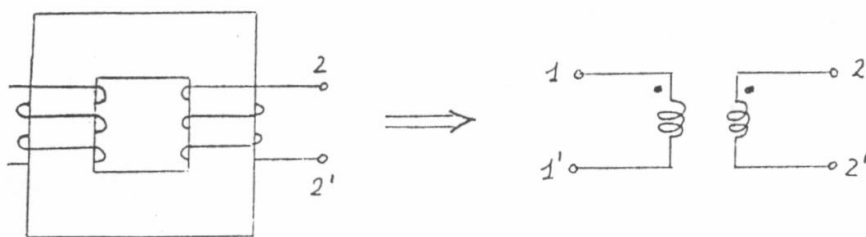
$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad L_p = L_1, \quad L_s = 0$$

- Le equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega\sqrt{L_1 L_2} \\ j\omega\sqrt{L_1 L_2} & j\omega L_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

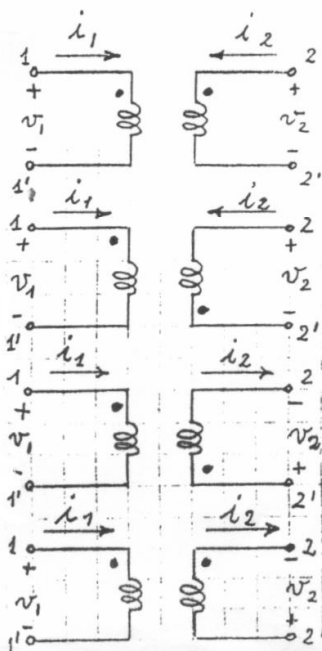
- In questo caso  $\det \mathbf{M} = 0$ , ovvero la matrice non è invertibile, ovvero il componente è non-controllato in tensione

## Mutua induttanza (6)



Convenzione: una tensione positiva applicata ad uno dei due bipoli al terminale contrassegnato dal punto genera nell'altro bipolo una tensione con il segno positivo sul terminale contrassegnato dal punto.

Es:



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

## *Legge di Ampere*

- La legge circuitale di Ampere ci permette di calcolare i campi magnetici note le correnti elettriche. E' particolarmente utile per sistemi simmetrici:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

- Dove  $I$  è una corrente continua e il vettore  $\mathbf{H}$  è misurato in [A/m]. Definiamo come positiva la corrente che fluisce nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa fatta ruotare nel senso del percorso della linea chiusa.
- Qualsiasi percorso viene scelto per l'integrazione di  $\mathbf{H}$ , il risultato è sempre pari alla corrente  $I$  che passa all'interno della curva chiusa, qualunque forma essa abbia.

## Legge di Ampere - esempi

- Consideriamo un percorso circolare posto in un piano perpendicolare al filo e con raggio  $\rho$ . Per simmetria, deduciamo che debba esistere solo la componente  $H_\varphi$  del campo, con modulo costante se  $\rho$  è costante. Si ha quindi:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\varphi \rho d\varphi = H_\varphi \rho \int_0^{2\pi} d\varphi = I$$
$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

- Consideriamo ora una bobina, o solenoide, di raggio  $R$ , con  $N$  spire avvolte in aria su una lunghezza  $d$ , percorse da una corrente  $I$ . Il campo, ben dentro al solenoide, è disposto lungo l'asse del solenoide, con il verso determinato dalla regola della mano destra (vite destrorsa, etc) secondo il verso di percorrenza delle spire da parte della corrente. Supponendo nullo il campo esterno al solenoide stesso, si ha:

$$Hd = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{d}$$

## *Flusso magnetico*

- Introduciamo ora il vettore **B**, chiamato densità di flusso magnetico, nello spazio vuoto, come:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H / m}$$

- dove B è misurato in weber per metro quadro [Wb/m<sup>2</sup>] o in tesla [T]. La costante  $\mu$  è chiamata permeabilità magnetica.
- Il flusso  $\Phi_B$  del vettore **B** attraverso una superficie  $S$  è dato da:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

- Si misura in weber [Wb].

## *Legge di Faraday*

- La legge di Faraday ci permette di calcolare la tensione che si genera in un percorso chiuso dovuta a un campo magnetico pulsante concatenato. Si esprime come:

$$fem = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Il percorso chiuso può non essere completamente formato da un conduttore continuo: può essere completato anche da un condensatore, o da una linea puramente immaginaria.

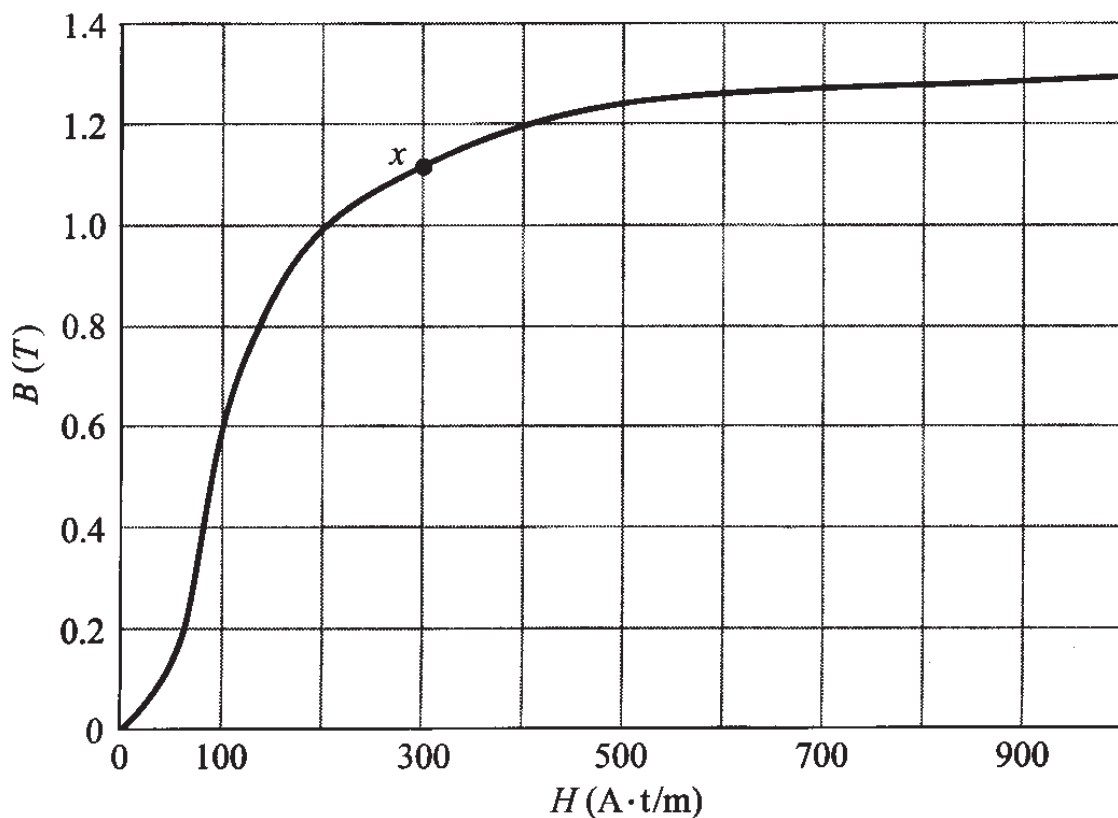
## *Legge di Faraday (2)*

- Una fem può risultare da una qualsiasi delle seguenti situazioni:
  - 1) un campo magnetico variabile concatenato con una spira fissa;
  - 2) un campo magnetico costante in moto relativo con una spira fissa;
  - 3) un campo magnetico costante e una spira variabile
  - 4) una combinazione delle due situazioni precedenti.
- Il segno negativo sta ad indicare che la fem produce una corrente il cui flusso, sommato all'originale, tende a ridurre l'ampiezza opponendosi al flusso originale. Questa è la legge di Lenz. Se il percorso chiuso è formato da  $N$  spire, si può scrivere:

$$fem = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

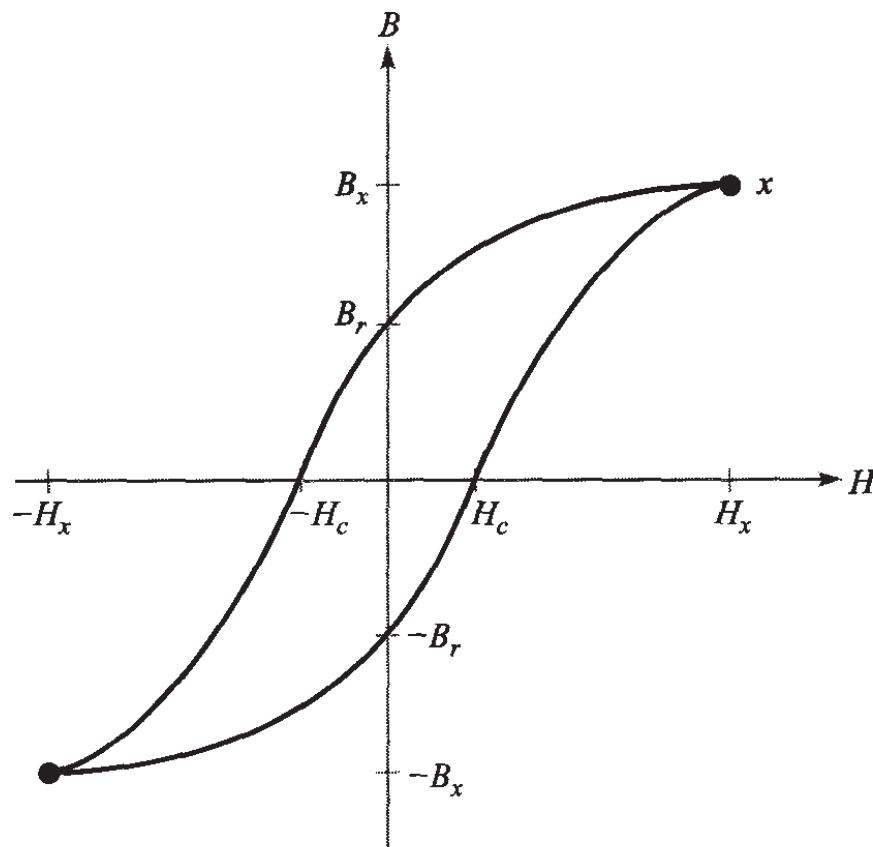
## *Isteresi magnetica*

- Consideriamo il legame tra  $H$  e  $B$  in un materiale ferromagnetico. In figura è rappresentata la curva di prima magnetizzazione di un materiale ferromagnetico.



## *Isteresi magnetica (2)*

- Raggiunto un valore massimo di  $H_x = 300 \text{ A} \cdot \text{spire/m}$ , riduciamo ora il valore di  $H$ . La curva di ritorno non coincide con la curva di andata. Notiamo che la curva di prima magnetizzazione è compresa tra le due curve successive di magnetizzazione, curve che sono tanto più strette, quanto più basso è il valore massimo di  $H$  raggiunto.
- L'energia dissipata durante un ciclo è pari all'area racchiusa dalle curve di isteresi.



## *Circuiti magnetici*

- Il nome deriva dalla analogia con i circuiti elettrici. Data la natura nonlineare delle porzioni ferromagnetiche del circuito, i metodi di analisi che devono essere adottati sono simili a quelli che si usano nei circuiti contenenti componenti nonlineari come i diodi, ad esempio.
- Dobbiamo introdurre una “corrente magnetica” e una “tensione magnetica”.
- Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico, definiamo un potenziale magnetico scalare, o meglio una tensione magnetica tra A e B, come:

$$V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

- dove l'integrale dipende dal percorso.

## *Circuiti magnetici (2)*

- A differenza del potenziale elettrico, il potenziale magnetico non è conservativo, poiché l'integrale su una linea chiusa non è nullo:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{tot} = NI$$

- Si può pensare che questo percorso chiuso, lungo cui calcoliamo la circuitazione di  $\mathbf{H}$ , sia l'equivalente magnetico di un circuito elettrico, un "tubo di flusso" chiuso su se stesso in cui sia confinato un flusso magnetico  $\Phi_B$ , ovvero la "corrente magnetica".
- La sorgente del flusso, detta forza magnetomotrice (fmm), è la corrente  $I_{tot}$  che passa all'interno del circuito magnetico; non è un componente identificabile con due morsetti, come nel caso dei circuiti elettrici.

## *Legge di Hopkinson*

- In analogia con la legge di Ohm:  $V = R I$ , consideriamo un tubo di flusso cilindrico lungo  $d$ , con sezione  $S$  e composto da un materiale lineare con permeabilità  $\mu$ .
- La legge di Hopkinson, dove  $\mathcal{R}$  è chiamata riluttanza [ $A \cdot \text{spire} / \text{Wb}$ ], si esprime come:

$$V_{mAB} = \mathcal{R} \Phi_B$$

- Analogamente alla resistenza dei conduttori elettrici di area  $S$  e lunghezza  $d$ , è possibile calcolare la riluttanza di conduttori isotropici e lineari con la seguente formula:

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu S}$$

- Il materiale più comune dove si applica questa formula è l'aria.

## Esempio 1

- Troviamo il flusso in un toroide, con il nucleo di aria, di 500 spire percorse da 4 A, una sezione di 6 cm<sup>2</sup> e un raggio medio di 15 cm. Il confinamento del campo nel toroide si ottiene distribuendo le spire uniformemente lungo la circonferenza del toroide stesso. L'equivalente elettrico di questo circuito è una sorgente di tensione chiusa su di una resistenza lineare.

$$V_{m,s} = 500 \times 4 = 2000 \text{ A} \cdot \text{spire}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{2\pi(0.15)}{4\pi 10^{-7} \times 6 \cdot 10^{-4}} = \\ = 1.25 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb}$$

$$\Phi_B = \frac{V_{m,s}}{\mathfrak{R}} = \frac{2000}{1.25 \cdot 10^9} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 2120 \text{ A} \cdot \text{spire/m}$$

$$H_\varphi 2\pi R = NI \Rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi R}$$

## *Esempio 2*

- Nel secondo esempio, usiamo un toroide con il nucleo di acciaio, eccetto per un traferro di 2 mm in aria. Le misure del toroide e il numero di spire sono le stesse di prima.
- Vogliamo sapere che corrente è necessaria per instaurare una densità di flusso di 1 T ovunque nel toroide. Il circuito magnetico attuale è equivalente a un circuito elettrico con una sorgente e due resistenze in serie, una delle quali nonlineare.
- Dal momento che è fissata la "corrente magnetica", è facile trovare la "tensione magnetica" su ogni resistenza e quindi la forza “magneto-motrice” complessiva.

## *Esempio 2 (2)*

- Nel traferro si ha:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_{\text{aria}} &= \frac{d_{\text{aria}}}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 6 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 2.65 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb}\end{aligned}$$

- Il flusso totale nel toroide è:

$$\Phi_B = BS = 1 \times 6 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

- La tensione magnetica nel traferro è:

$$\begin{aligned}V_{m,\text{aria}} &= \Phi_B \mathfrak{R}_{\text{aria}} = 6 \cdot 10^{-4} \times 2.65 \cdot 10^6 = \\ &= 1590 \text{ A} \cdot \text{spire/m}\end{aligned}$$

## Esempio 2 (3)

- Guardando ora la figura sull'isteresi, vediamo che è necessario un campo magnetico  $H$  pari a  $200 \text{ A} \cdot \text{spire/m}$  per produrre una densità di flusso di  $1 \text{ T}$ . Perciò si ha:

$$H_{\text{acciaio}} = 200 \text{ A} \cdot \text{spire/m}$$

$$\begin{aligned} V_{m,\text{acciaio}} &= H_{\text{acciaio}} d_{\text{acciaio}} = 200 \times 2\pi \times 0.15 = \\ &= 188 \text{ A} \cdot \text{spire} \end{aligned}$$

- La somma delle due tensioni magnetiche corrisponde alla tensione magnetica complessiva del circuito e alla fmm che deve essere applicata

$$V_{m,\text{tot}} (\text{fmm}) = V_{m,\text{acciaio}} + V_{m,\text{aria}} = 1778 \text{ A} \cdot \text{spire}$$

- La corrente è quindi

$$I = \frac{V_{m,\text{tot}}}{N} = 3.556 \text{ A}$$

## *Esempio 2 (4)*

- Confrontiamo ora il vettore  $H$  nell'acciaio e quello nell'aria. Calcoliamo infine la riluttanza “linearizzata” nell'acciaio.

$$H_{\text{aria}} = \frac{V_{m,\text{aria}}}{d_{\text{aria}}} = \frac{1590}{2 \cdot 10^{-3}} = 795 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{spire}$$

$$H_{\text{acciaio}} = 200 \text{ A} \cdot \text{spire}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{aria}} = 2.65 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{acciaio}} = \frac{188}{6 \cdot 10^{-4}} = 0.3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{spire/Wb}$$

- Si vede come la “resistenza” al flusso dell'acciaio sia molto inferiore a quella nell'aria.

## *Esempio 2 (5)*

- Da notare la differenza di tensione magnetica tra l'anello in acciaio e il traferro. Un materiale ferroso presenta una "resistenza magnetica" molto più bassa dell'aria, per cui il flusso magnetico rimane confinato, per la maggior parte, nell'anello stesso. Per fare un'analogia con i circuiti elettrici, se mettiamo in parallelo due resistenze in valore molto diverse tra loro, la corrente scorrerà quasi interamente nella resistenza di valore più basso.
- E' infine importante notare che, pur non scendendo in particolari, ci sono parecchie approssimazioni nei calcoli fatti, che comunque non invalidano i risultati ottenuti.