Value at Risk

Value At Risk

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, ...), credito, operativo, ...
- utilizzo:
  - stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency, ...
  - ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - comunicazione con i clienti
  - valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura
  - stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - ...
- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-risk
  - expected shortfall

PROFITTO/PERDITA

- Sia $P(u)$ il valore/prezzo di un'attività al tempo u
  - stocks
  - bonds
  - commodities (merci)
  - derivati
  - ...
  - portafoglio di attività
- consideriamo il periodo $[t, T]$ (holding period) di lunghezza $\Delta = T - t$:
  - ipotesi: l'attività viene posseduta sul periodo $[t, T]$
  - eventuali flussi generati dal possesso dell'attività sono reinvestiti/finanziati nell'attività stessa
  - $\Delta = 1$: 1 anno
  - $\Delta = 1/365$: 1 giorno
  - $\Delta = 1/250$: 1 giorno (contando solo i giorni in cui i mercati sono aperti)
- ipotesi: $P(u) \geq 0$ per ogni u (responsabilità limitata) e $P(t) > 0$ (prezzo corrente positivo)

PROFITTO/PERDITA

- il profitto/perdita sul periodo $[0, T]$ (holding period P&L) è dato da
$$\text{P\&L}(t, T) = P(T) - P(t)$$
  variazione di valore dell'attività
- $\text{P\&L}(t, T)$ rappresenta il guadagno/perdita se si prende una posizione lunga (acquista) il sottostante in t e si liquida la posizione in T
- interpretazione

$$\text{P\&L} > 0 \Rightarrow \text{P\&L} = \text{guadagno}$$

$$\text{P\&L} < 0 \Rightarrow -\text{P\&L} = \text{perdita}$$

- il rendimento viene usualmente misurato su base
  - semplice o composto
  - periodale o annuo

PROFITTO/PERDITA

▷ Rendimento periodale semplice

$$I(t) \equiv I(t,T) = \frac{\mathrm{P\&L}(t,T)}{P(t)} = \frac{P(T)}{P(t)} - 1$$

cioè

$$P(T) = P(t)(1 + I(t))$$

▷ su base annua, il rendimento equivalente è

$$I_\Delta(t,T) = \frac{I(t,T)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{P(T)}{P(t)} - 1\right)$$

▷ riesce $-1 \leq I(t) < +\infty$

Gestione del Rischio Finanziario

PROFITTO/PERDITA

▷ Rendimento periodale composto

$$R(t) \equiv R(t,T) = \log \frac{P(T)}{P(t)}$$

cioè

$$P(T) = P(t)\mathrm{e}^{R(t,T)}$$

▷ su base annua, il rendimento equivalente è

$$R_\Delta(t,T) = \frac{R(t,T)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\log\frac{P(T)}{P(t)}$$

▷ riesce $-\infty < I(t) < +\infty$

Profitto/perdita

▷ Relazioni tra rendimenti semplici e composti

$$I(t) = e^{R(t)} - 1$$

$$R(t) = \log(1 + R(t))$$

▷ se $|R(t)|$ è 'piccolo' allora

$$R(t) \approx I(t)$$

e viceversa (formula di Taylor)

Rendimenti composti: proprietà temporali

▷ Time aggregation of compound returns: rendimenti periodali composti su un periodo (t, T) è la somma dei rendimenti periodali composti sui sotto-periodi $(t_0, t_1), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$, con $t_0 = t < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$

$$R(t, T) = R(t_0, t_1) + \ldots + R(t_{n-1}, t_n)$$

▷ rendimento annuo è somma dei rendimenti giornalieri

▷ nel caso di rendimenti semplici il risultato non è vero

$$1 + I(t, T) = (1 + I(t_0, t_1)) \cdot \ldots \cdot (1 + I(t_{n-1}, t_n))$$

▷ nel caso di rendimenti composti annui?

Rendimenti semplici e composti

- Modellizzare rendimenti semplici o composti non è equivalente
- è tipico assumere che i rendimenti siano distribuiti normalmente
- visto il range di $R(t,T)$ e $I(t,T)$ questa ipotesi è più adatta ai rendimenti composti
- se $R(t,T) \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora $I(t,T) = \mathrm{e}^{R(t,T)} - 1$ si distribuisce come lognormale shiftata
- la distribuzione sarà molto simile se $\Delta = T - t$ è piccolo, mentre potrà essere molto diversa quando l'ampiezza dell'intervallo aumenta

Tassi di Cambio

- vantaggio dei rendimenti composti: sia $P(t)$ il tasso di cambio f/d (foreign/domestic)
- $P(t)$ = quantità di moneta domestica per acquistare 1 unità di valuta straniera al tempo t
- $\frac{1}{P(t)}$ = quantità di moneta straniera per acquistare 1 unità di valuta domestica al tempo t
  - ⋆ rendimento composto per un investitore domestico:

$$R^d(t,T) = \log \frac{P(T)}{P(t)}$$

  - ⋆ rendimento composto per un investitore straniero:

$$R^f(t,T) = \log \frac{P(t)}{P(T)} = -R^d(t,T)$$

Rendimenti composti: proprietà temporali

- conseguenze dell'additività temporale dei rendimenti composti
- normalità: se la distribuzione congiunta di $R(t_0, t_1), \ldots, R(t_{n-1}, t_n)$ è normale, allora $R(t, T)$ è normale
- momenti, non correlazione seriale
  - ⋆ $E[R(t_{i-1}, t_i)] = \mu_i$, $\text{var}[R(t_{i-1}, t_i)] = \sigma_i^2$
  - ⋆ rendimenti su intervalli disgiunti, $R(t_0, t_1), \ldots, R(t_{n-1}, t_n)$, sono incorrelati

$$\text{cov}[R(t_{i-1}, t_i), R(t_{j-1}, t_j)] = 0 \qquad \text{for } i \neq j$$

- segue che

$$E[R(t, T)] = \mu_1 + \ldots + \mu_n$$
$$\text{var}[R(t, T)] = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

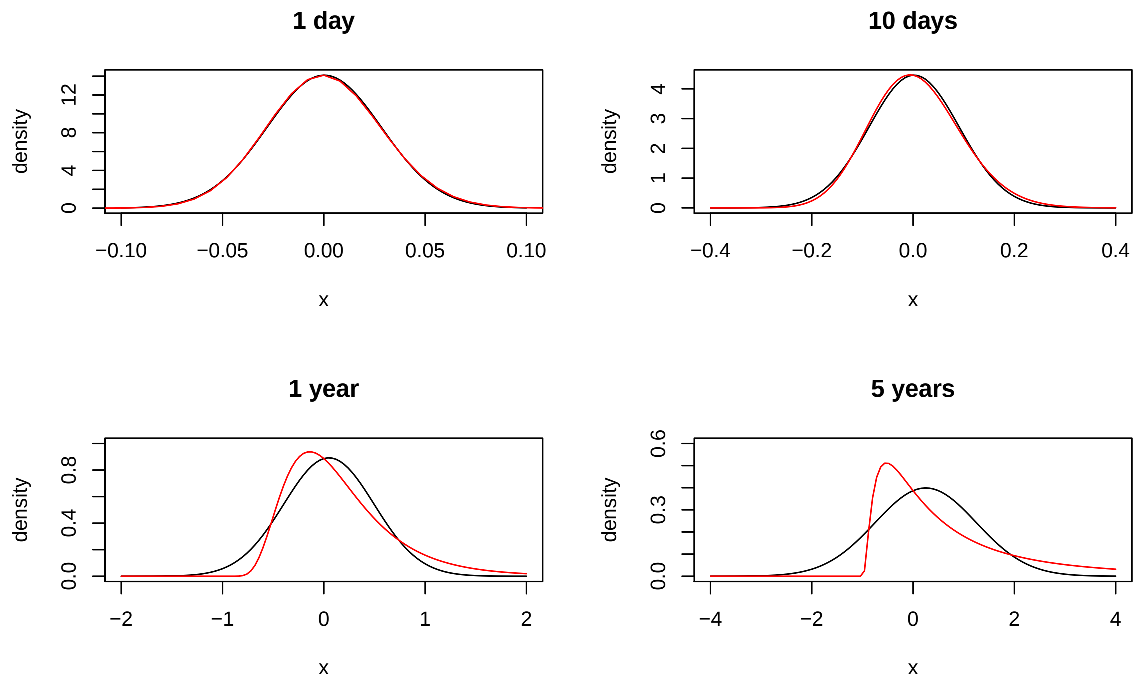
Rendimenti composti: proprietà temporali

- nel caso di intervalli di ugual ampiezza e distribuzioni stazionarie:
  - ⋆ $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè $t_i = t + i\Delta$
  - ⋆ $\mu_i = \mu$, $\sigma_i^2 = \sigma^2$
- riesce allora: media e varianza dei rendimenti composti crescono linearmente col tempo
  - ⋆ $E[R(t, t + n\Delta)] = n\mu$
  - ⋆ $\text{var}[R(t, t + n\Delta)] = n\sigma^2$
- "standard deviation rule":

$$\text{sd}[R(t, t + n\Delta)] = \sigma\sqrt{n}$$

  la deviazione standard cresce con la radice del tempo
- tale ipotesi può essere testata per verificare la consistenza della non correlazione seriale (e.g. "variance ratio test")

Rendimenti composti: proprietà temporali



P&L di portafoglio

- Rendimento di portafoglio: se il portafoglio è composto da N attività con prezzi unitari P_j, $j = 1, \ldots, N$ e quantità q_j, $j = 1, \ldots, N$, il valore è

$$V(t) = \sum_{j=1}^{N} q_j P_j(t)$$

- ipotesi: la composizione del portafoglio non varia sul periodo (t, T)
- profitto/perdita di portafoglio:

$$\text{P\&L}_P(t,T) = \sum_{j=1}^{N} q_j \text{P\&L}_j(t,T)$$

- rendimento semplice e composto di portafoglio

$$I_P(t,T) = \frac{V(T)}{V(t)} - 1, \qquad R_P(t,T) = \log \frac{V(T)}{V(t)}$$

P&L di portafoglio

- percentuale di ricchezza investita nel titolo j:

$$w_j = \frac{q_j P_j(t)}{V(t)} = \frac{q_j P_j(t)}{\sum_{j=1}^N q_j P_j(t)}$$

  riesce $\sum_{j=1}^N w_j = 1$
- rendimento semplice di portafoglio è la media aritmetica ponderata dei rendimenti semplici (additivity across assets)

$$I_P(t,T) = \sum_{j=1}^N w_j I_j(t,T)$$

- rendimento composto di portafoglio è la media ponderata esponenziale dei rendimenti composti

$$R_P(t,T) = \log\left(\sum_{j=1}^N w_j \mathrm{e}^{R_j(t,T)}\right)$$

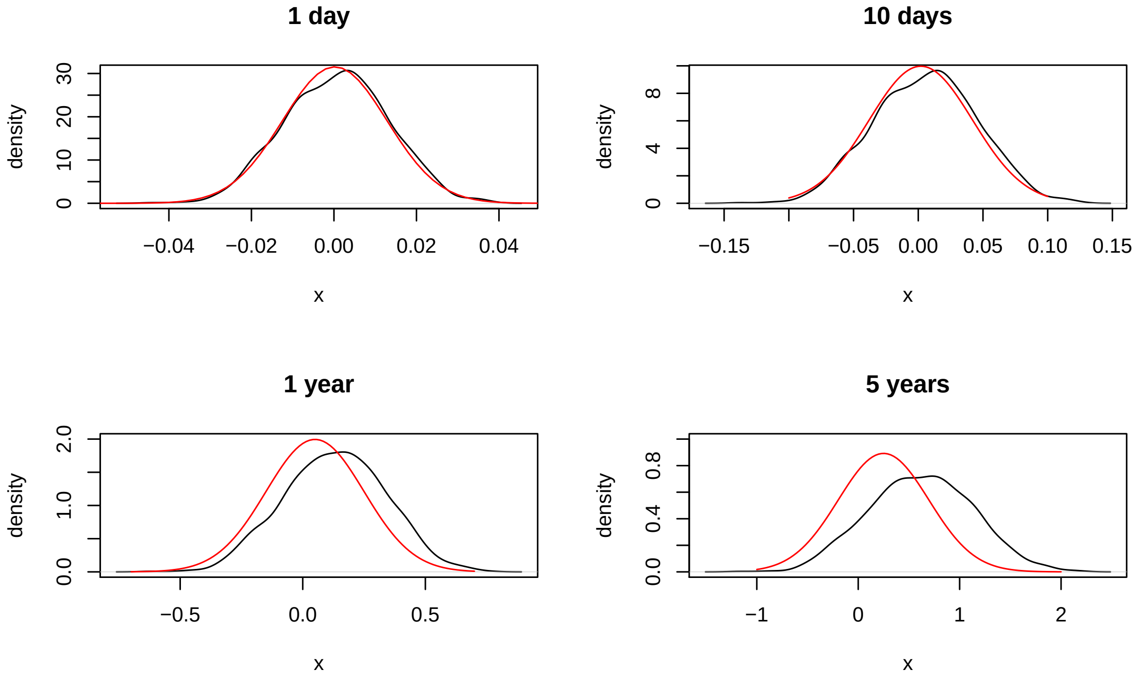
P&L di portafoglio

- Se i rendimenti delle attività componenti il portafoglio sono “’piccole”, allora vale l’approssimazione (usare $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ e $\log(1+x) \approx x$ quando $x \to 0$)

$$R_P(t,T) \approx \sum_{j=1}^N w_j R_j(t,T)$$

- se la distribuzione congiunta di $R_1(t,T), \ldots, R_N(t,T)$ è normale, in generale non è nota la distribuzione di $R_P(t,T)$ (logaritmo di una combinazione lineare di lognormali)
- tuttavia, l’approssimazione consente di assumere normalità delle componenti e del portafoglio allo stesso tempo
- l’approssimazione è valida per orizzonti temporali limitati

Rendimenti di portafoglio



Value-at-Risk

- ▷ Value-at-Risk: la massima perdita che si può verificare
  - ⋆ su un certo intervallo temporale (t, T)
  - ⋆ con un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$
- ▷ Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
- ▷ indicata con $L \equiv L(t, T) = -\text{P\&L}$ la perdita ed un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento

$$(L \leq x) = (\text{P\&L} + x \geq 0)$$

  il capitale allocato assorbe le perdite
- ▷ la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α

$$\text{Prob}(L \leq x) \geq \alpha$$

- ▷ si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:

$$\text{VaR}_\alpha^{\text{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \text{Prob}[L \leq x] \geq \alpha\}$$

Quantile

- Data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q\}$$

- il quantile $F_X^{-1}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q
- proprietà
  - $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra
  - $$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\} =: \text{lower bound of } X,$$
    $$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 1\} =: \text{upper bound of } X$$
  - per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$

Quantile

- Data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq q\}$$

- proprietà
  - per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,

    $$F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x)$$

  - discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
  - se F_X è strettamente crescente e continua, allora F_X^{-1} è l'inversa di F_X, definita da $F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$
  - se g è non decrescente, continua a sinistra, allora

    $$F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))$$

Value-at-Risk

- Il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L:

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$

- usando la distribuzione di P&L, è

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{P\&L}} = -\sup\{x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{Prob}[\mathrm{P\&L} < x] \leq 1 - \alpha\}$$

  perdite superiori a VaR_{α} si possono verificare con probabilità inferiore a $1 - \alpha$
- nel caso in cui la distribuzione di P&L sia invertibile, la definizione richiede

$$\mathrm{Prob}[L \leq \mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{P\&L}}] = \alpha$$

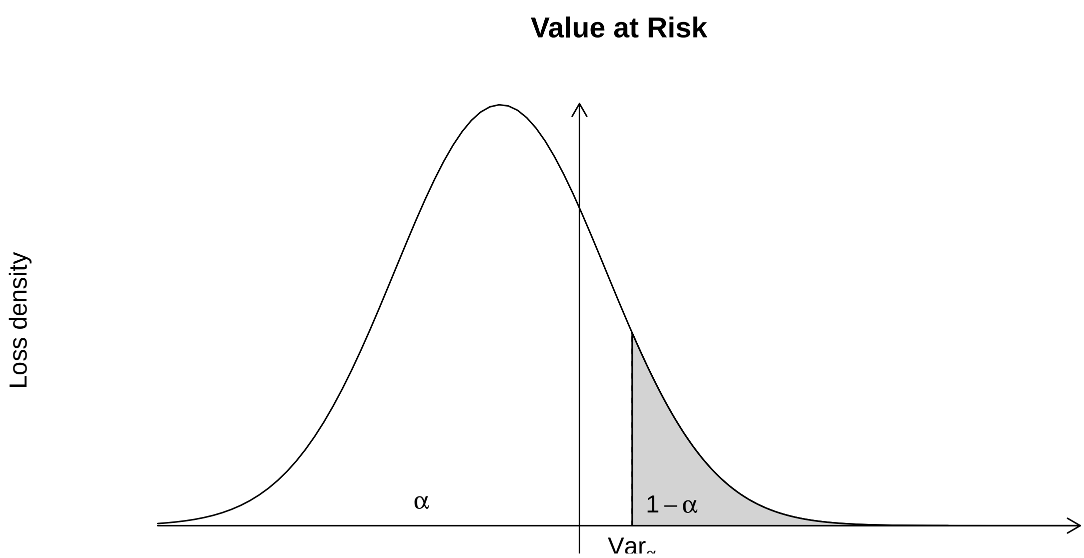
  o

$$\mathrm{Prob}[\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{P\&L}}] = 1 - \alpha$$

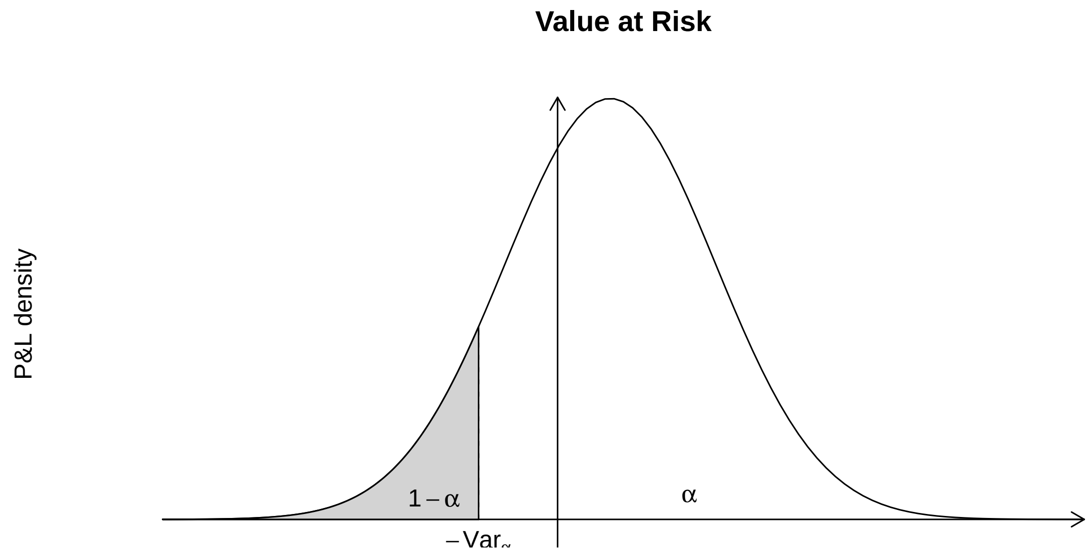
  cioè

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}^{\mathrm{P\&L}} = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1 - \alpha)$$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



Value-at-Risk

- relazione tra $\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}$: Value-at-risk in termini monetari:

  $$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-\mathrm{P\&L}(t,T) \leq x] \geq \alpha\} = F^{-1}_{-\mathrm{P\&L}}(\alpha)$$

  e VaR_α^R: Value-at-risk in termini di rendimento (composto)

  $$\mathrm{VaR}_\alpha^R = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{Prob}[-R(t,T) \leq x] \geq \alpha\} = F^{-1}_{-R}(\alpha)$$

- P&L è una funzione crescente di R e viceversa; si trovano le relazioni

  $$\mathrm{VaR}_\alpha^R = -\log\left(1 - \frac{\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}}{P(t)}\right)$$

  $$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = P(t)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{VaR}_\alpha^R}\right)$$

Value-at-Risk

- ▷ Elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - ⋆ orizzonte temporale $T - t$
  - ⋆ livello di confidenza α
  - ⋆ distribuzione di probabilità del profitto/perdita P&L o del rendimento R (o I)
- ▷ Orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore in base al business
  - ⋆ scelte tipiche: 1 giorno, 10 giorni (2 settimane), 1 anno
  - ⋆ portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - ⋆ trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - ⋆ Solvency: 1 anno
  - ⋆ tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

- ▷ livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - ⋆ usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - ⋆ trading floors: $\alpha = 90\%$
  - ⋆ calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% ("1 su 20", "1 su 200")
  - ⋆ il Value-at-Risk cresce con α
- ▷ la costruzione della distribuzione di probabilità di L o R è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - ⋆ parametrico
  - ⋆ non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - ⋆ semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

Value-at-Risk

▷ Approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) poi calcolare il Value-at-Risk analiticamente o numericamente risolvendo

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = F_L^{-1}(\alpha) \quad \text{o} \quad \mathrm{Prob}[L \leq \mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}}] = \alpha$$

▷ VaR con distribuzione normale: $R \sim N(\mu, \sigma^2)$

⋆ indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = -\left(\mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$$

⋆ in termini monetari:

$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{P\&L}} = P(t)\left(1 - \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha}\right)$$

⋆ Value-at-Risk $\downarrow \mu$, $\uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$)

▷ VaR con distribuzione normale: $(t, T) = (t, t + n\Delta)$, $R(t_{i-1}, t_i) \sim N(\mu, \sigma^2)$, rendimenti incorrelati

⋆ $E[R(t, t + n\Delta)] = n\mu$, $\mathrm{sd}[R(t, t + n\Delta)] = \sigma\sqrt{n}$

⋆

$$\mathrm{VaR}_\alpha^R = -\left(\mu n + \sigma\sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)$$

⋆ andamento rispetto all'orizzonte temporale n (se $\alpha > 50\%$)? VaR $\uparrow n$ se $\mu \leq 0$

$$\text{VaR} \quad \text{prima crescente, poi decrescente, se} \quad \mu > 0$$