Esercizi di probabilità e statistica

Variabili aleatorie continue - 3

Luca Palmieri

03 Maggio 2017

Esercizio 1. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di teste ottenute lanciando per 40 volte consecutive una moneta equilibrata.
Si calcoli la probabilità che $X = 20$. Si confronti il risultato esatto così calcolato con quello che si ottiene approssimando la variabile aleatoria binomiale con una gaussiana di opportuna media e varianza.

Esercizio 2. Si supponga che il numero di chilometri X che un automobile può percorrere prima che la sua batteria si scarichi sia descritto accuratamente da una variabile aleatoria esponenziale con media pari a 10'000 km.
Se un uomo possiede un automobile, non nuova, qual è la probabilità che riesca a compiere un viaggio di 5000 km senza dover cambiare la batteria della propria vettura?
Cosa si può dire nel caso in cui X **non** ha distribuzione esponenziale?

Esercizio 3. Un punto è scelto a caso (*a.k.a. distribuzione uniforme*) all'interno di un segmento di lunghezza L.
Qual è la probabilità che il rapporto tra la lunghezza del segmento più corto e la lunghezza del segmento più lungo sia inferiore a 1/4?

Esercizio 4. Il tempo di vita di un chip prodotto da una certa fabbrica di semiconduttori è descritto da una variabile aleatoria normale con media $\mu = 1.4 * 10^6$ e varianza $\sigma^2 = 3 * 10^5$ (in ore).
Qual è la probabilità (approssimata o esatta) che su un campione di 100 chip ce ne siano almeno 20 il cui tempo di vita è inferiore a $1.8 * 10^6$ ore?

Esercizio 5. Un uomo e una donna devono incontrarsi in una certa piazza. Ciascuno dei due arriva ad un orario uniformemente distribuito tra le 12:00 e le 13:00.
Si calcoli la probabilità che il primo ad arrivare debba aspettare più di 10 minuti.

Esercizio 6. La densità congiunta di due variabili aleatorie, X e Y, è data da:

$$f_{X,Y}(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad -y \leq x \leq y \qquad 0 < y < \infty \tag{1}$$

(i) Si calcoli c;

(ii) Si calcolino le densità marginali di X e Y;

(iii) Si calcoli $\mathbb{E}[X]$.

Esercizio 7. La densità congiunta di due variabili aleatorie, X e Y, è data da:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad 0 < x,\, y < +\infty \tag{2}$$

Si calcolino $\mathbb{P}(X < Y)$ e $\mathbb{P}(X < a)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti: la prima con legge uniforme continua sull'intervallo $[2,4]$; la seconda con legge data dalla densità di probabilità

$$f_Y(y) = \frac{y}{6} 1_{[2,4]}(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(i) Si calcoli $\mathbb{E}[X + 3Y]$ e $Var[2X - 3Y]$;

(ii) Determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Z = Y - 1$;

(iii) Calcolare $\mathbb{E}[X^2(Z-2)]$ e $Var[X + 3Z]$;

(iv) Calcolare $\mathbb{P}(Z^2 - Z > 0)$.