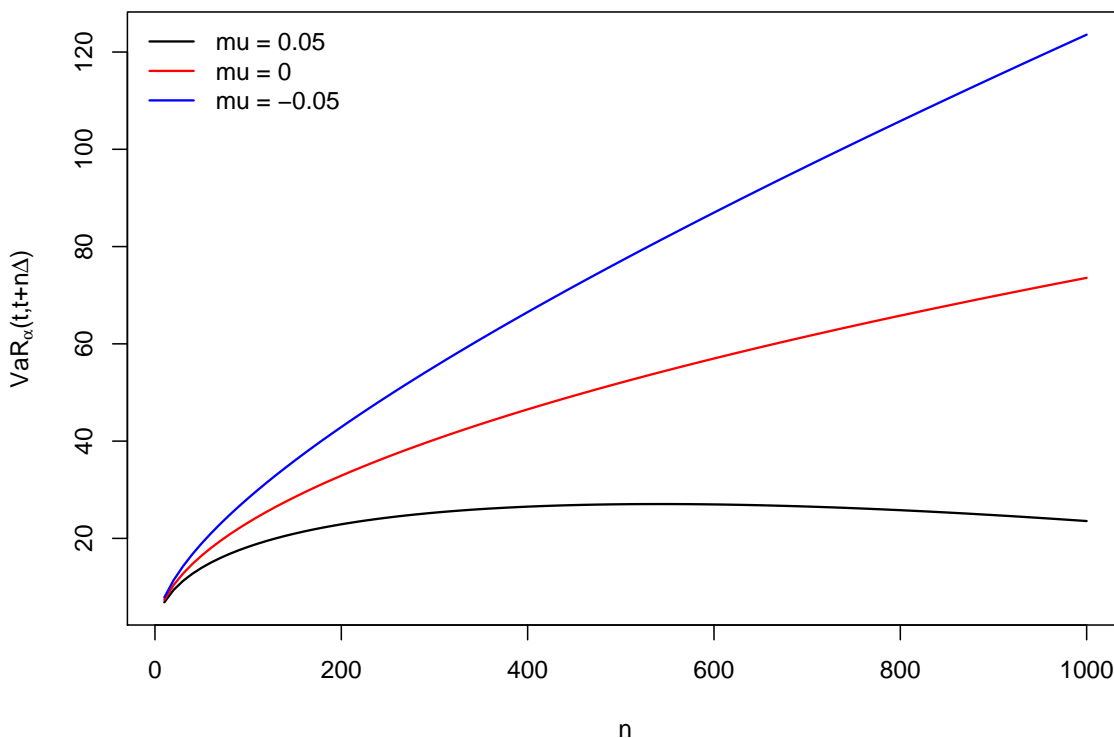


## VALUE-AT-RISK



316

## VALUE-AT-RISK

- ▷ Un'alternativa alla distribuzione normale è la distribuzione  $t$  di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- ▷ **VaR con distribuzione  $t$  di Student:**  $R \sim \mu + \sigma t_\nu$ , dove  $t_\nu$  distribuzione  $t$  di Student con  $\nu > 1$  gradi di libertà
  - ★ se  $\nu$  intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2 + \dots + Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

dove  $Z, Z_1, \dots, Z_\nu$  sono normali standard indipendenti

- ★ in generale, la densità di  $t_\nu$  è

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- ★ momenti:  $E[t_\nu] = 0$ ,  $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$  per  $\nu > 2 \Rightarrow E[R] = \mu$ ,  
 $var[R] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$

317

## VALUE-AT-RISK

- ▷ **VaR con distribuzione  $t$  di Student:**  $R \sim \mu + \sigma t_\nu$
- ★ essendo  $t$  simmetrica, la perdita è  $-R \sim -\mu - \sigma t_\nu \sim -\mu + \sigma t_\nu$
  - ★ con calcolo simile al caso normale,

$$\text{VaR}_\alpha^R = -(\mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(1 - \alpha))$$

$\alpha$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.9975	0.999
normal	0.21	0.28	0.34	0.42	0.47	0.51	0.57
$\nu$							
10.00	0.22	0.31	0.40	0.50	0.58	0.67	0.78
5.00	0.25	0.35	0.46	0.62	0.76	0.90	1.13
2.50	0.30	0.46	0.66	1.02	1.38	1.86	2.71
2.10	0.32	0.52	0.77	1.26	1.78	2.51	3.92
2.01	0.33	0.53	0.81	1.33	1.92	2.74	4.36

318

## VALUE-AT-RISK: APPROCCIO PARAMETRICO

- ▷ vantaggi
- ★ solo due (o tre) parametri da stimare
  - ★ si estende a periodi di lunghezza  $n$  via la regola della radice quadrata (nel caso normale)
  - ★ si estende al caso di portafogli
- ▷ svantaggi
- ★ scelta di un modello che consenta code pesanti e asimmetria?
  - ★ rischio di parametro: il metodo richiede la stima dei parametri  $\mu$ ,  $\sigma$  (e  $\nu$  nel caso  $t$  di Student)  $\Rightarrow$  intervalli di confidenza per il Value-at-Risk
  - ★ rischio di modello: il metodo richiede la scelta di un modello  $\Rightarrow$  ogni modello è sbagliato

319

# VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

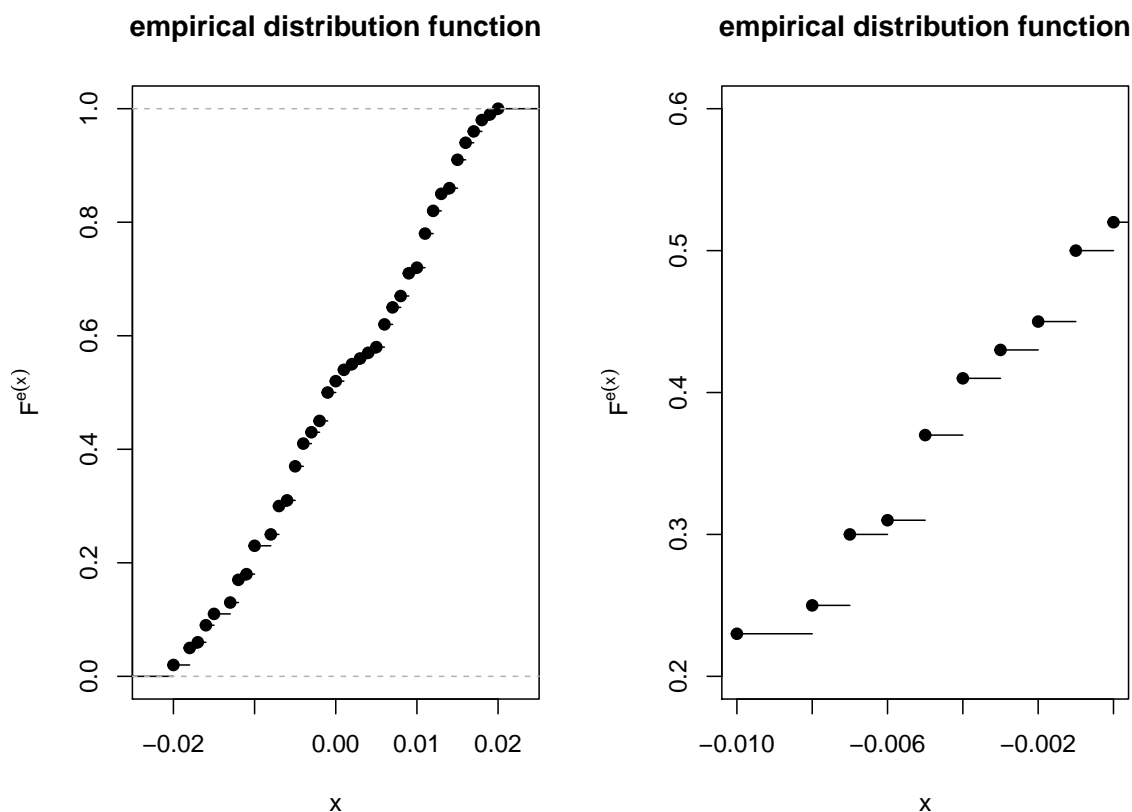
- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**
  - ★ approccio molto semplice: usa la **funzione di ripartizione empirica** costruita da un campione casuale  $x_1, \dots, x_m$

$$F^e(x) = \frac{\text{numero di } i : x_i \leq x}{m}$$

- ★ indicato con  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(m)}$  la **statistica d'ordine**, se gli  $x_i$  sono tutti distinti riesce  $F^e(x_{(i)}) = \frac{i}{m}$ : salti in corrispondenza agli  $x_{(i)}$  pari a  $1/m$ , costante tra due  $x_{(i)}$
- ★ se gli  $x_i$  non sono tutti distinti: se  $x_{(i-1)} < x_{(i)} = x_{(i+1)} = \dots = x_{(i+k-1)} < x_{(i+k)}$  il salto in corrispondenza a  $x_{(i)}$  è pari a  $k/m$ , per il resto costante a tratti

320

# VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION



321

## VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**
- ★ dati  $r_1, \dots, r_m$  un campione casuale di  $m$  rendimenti composti relativi a periodi di uguale ampiezza  $\Delta$  (e.g. giornalieri) e  $l_i = -r_i$  le corrispondenti perdite
  - ★ si costruisce la statistica d'ordine  $l_{(1)} \leq \dots \leq l_{(m)}$  e la corrispondente funzione di ripartizione empirica  $F^e$
  - ★ il Value-at-Risk è

$$\text{VaR}_\alpha^R = \inf\{x \in \mathbb{R} : F^e(x) \geq \alpha\}$$

- ★ se  $\alpha m$  è un intero, allora

$$\text{VaR}_\alpha^R = l_{(\alpha m)} = -r_{((1-\alpha)m)}$$

- ★ se  $\alpha m$  non è necessariamente un intero, allora

$$\text{VaR}_\alpha^R = l_{(\lceil \alpha m \rceil)}$$

dove  $\lceil x \rceil =$  minimo intero maggiore o uguale a  $x$

322

## VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION

- ▷ approccio non parametrico: **historical simulation**
- ★ spesso si usa una variante che utilizza una media dei due valori  $l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)}, l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$  (se diversi), dove  $\lfloor x \rfloor =$  massimo intero minore o uguale a  $x$
  - ★ si pone

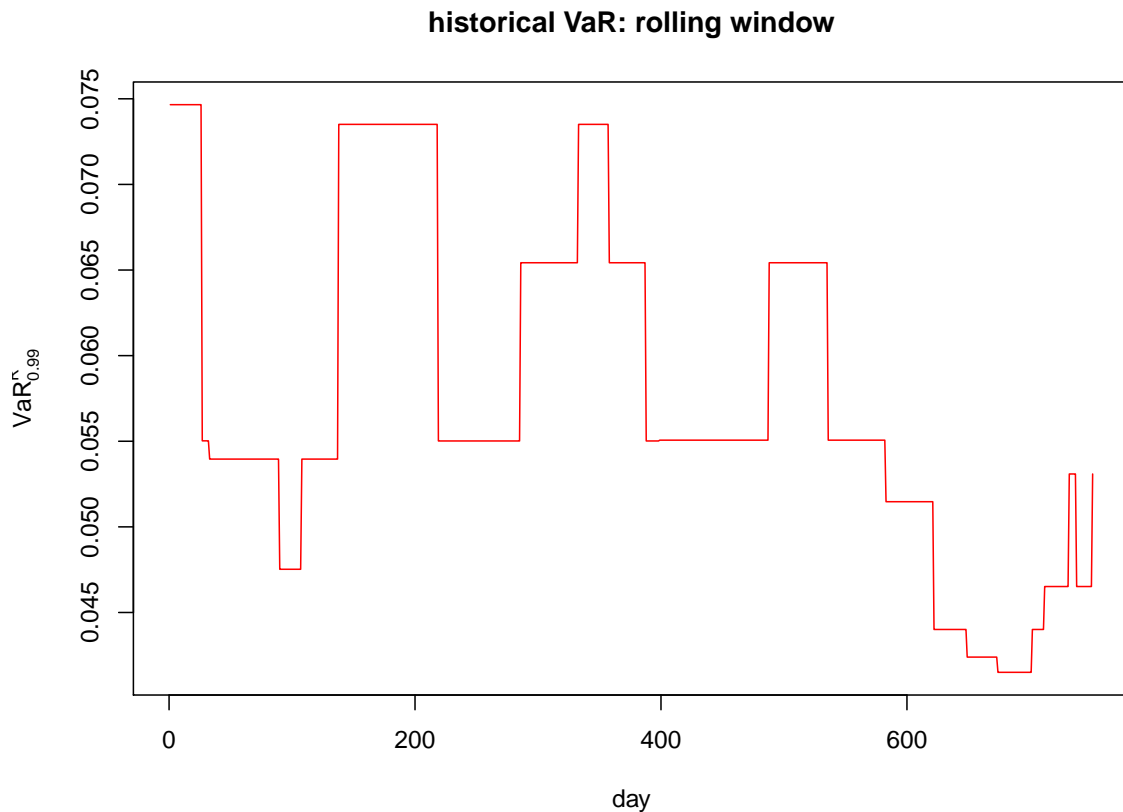
$$\text{VaR}_\alpha^R = (1 - \gamma)l_{(\lfloor \alpha m \rfloor)} + \gamma l_{(\lfloor \alpha m \rfloor + 1)}$$

dove  $0 \leq \gamma \leq 1$  è il peso

- ★ classica scelta:  $\gamma = \alpha m - \lfloor \alpha m \rfloor$
- ★ per  $\gamma = 0$  se  $\alpha m$  intero,  $\gamma = 1$  se  $\alpha m$  non intero, si ritorna alla definizione precedente

323

## VALUE-AT-RISK: HISTORICAL SIMULATION



324

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ problemi della simulazione storica:
  - ★ a differenza del VaR parametrico, non si può estendere facilmente il caso uniperiodale a quello  $n$ -periodale
  - ★ si potrebbe applicare il metodo direttamente a periodi di lunghezza  $n$  al costo di una perdita notevole di dati (e.g. con 250 rendimenti giornalieri ci sono solo 12 rendimenti mensili)
- ▷ alternativa: **bootstrap** non parametrico (Efron (1979))
  - ★ tecnica introdotta in statistica inferenziale per sfruttare campioni limitati
  - ★ idea: (ri)estrarre **con reinserimento** un campione da quello dato, di uguale lunghezza
  - ★ calcolare la statistica di interesse sul nuovo campione
  - ★ ripetere la procedura un numero elevato di volte
  - ★ si ottiene così la distribuzione campionaria della statistica di interesse  $\Rightarrow$  media, intervalli di confidenza, ...

325

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

### ▷ bootstrap VaR, 1 periodo

1. è dato un campione  $r_1, \dots, r_m$  di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
2. si costruisce un nuovo campione di medesima lunghezza  $m$  via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con  $\hat{r}_{1,1}, \dots, \hat{r}_{1,m}$
3. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal nuovo campione, indicato con  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R$
4. si ripetono 2. e 3. un numero scelto  $M$  di volte, ottenendo  $M$  campioni di lunghezza  $m$
5. da ognuno degli  $M$  campioni si estrae il Value-at-Risk, indicati con  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
6. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,bootstrap}^R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}^R$$

326

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

### ▷ bootstrap VaR, 1 periodo

- ★ si può usare il campione di bootstrap dei Value-at-Risk per costruire **intervalli di confidenza** per  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,bootstrap}^R$
  - ★ si calcolano i Value-at-Risk per ogni campione bootstrap come in 1.-5.,  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
  - ★ si sceglie un livello di confidenza  $\alpha'$ , non collegato con il livello di confidenza del Value-at-Risk  $\alpha$ !
  - ★ si calcolano poi il  $(1 - \alpha')/2$  e il  $(1 + \alpha')/2$  quantili della distribuzione  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
- ▷ il metodo funziona bene se il campione iniziale non è **troppo piccolo** e se proviene da una distribuzione **ragionevolmente simmetrica**

327

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ osservazioni sul metodo bootstrap
  - ★ ogni ricampionamento del campione originale ne genera uno **potenzialmente diverso**
  - ★ il Value-at-Risk calcolato su ogni ricampionamento sarà (potenzialmente) diverso da quello del campione originale
  - ★ in ogni ricampionamento, una data osservazione del campione originale potrà apparire più volte, o non apparire per niente
  - ★ una osservazione che appare ripetuta nel campione originale sarà ricampionata con probabilità proporzionale alla sua frequenza
  - ★ l'effetto di questa distorsione — i VaR di ogni bootstrap differiscono da quello empirico calcolato sul campione originale — se la dimensione campionaria  $m$  è sufficientemente grande
- ▷ idea del metodo bootstrap: la variabilità delle stime di bootstrap intorno alla stima empirica è simile/mima la variabilità della stima empirica intorno al valore “vero”
- ▷ per campioni di dimensione  $m$  ragionevolmente elevata, la distribuzione empirica è vicina alla popolazione  $\Rightarrow$  il bootstrap (campionare con rimpiazzo dalla distribuzione empirica) non differisce molto dal campionamento casuale dalla popolazione

328

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR,  $n$  periodi:**  $(t, T) = (t, t + n\Delta)$ 
  1. è dato un campione  $r_1, \dots, r_m$  di rendimenti uniperiodali (e.g. giornalieri)
  2. si costruisce un nuovo campione di lunghezza  $n$  via **estrazione con rimpiazzo**, indicato con  $\hat{r}_{1,1}(1), \dots, \hat{r}_{1,1}(n)$
  3. si ottiene un rendimento sul periodo  $(t, t + n\Delta)$  via

$$\hat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta) = \sum_{j=1}^n \hat{r}_{1,1}(j)$$

4. si ripetono 2.-3.,  $m$  volte in maniera da ottenere un campione  $\hat{r}_{1,1}(t, t + n\Delta), \dots, \hat{r}_{1,m}(t, t + n\Delta)$  di rendimenti  $n$ -periodali
5. si calcola (via **simulazione storica**) il Value-at-Risk dal campione multi periodale, indicato con  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R$
6. si ripetono 2.-4.. un numero scelto  $M$  di volte, ottenendo  $M$  stime di Value-at-Risk, indicati con  $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,1}^R, \dots, \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,M}^R$
7. si calcola poi la **stima di bootstrap** del VaR via

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha,bootstrap}^R = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \widehat{\text{VaR}}_{\alpha,i}^R$$

329

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ **bootstrap VaR,  $n$  periodi:**  $(t, T) = (t, t + n\Delta)$ 
  - ★ similmente si aggiungono intervalli di confidenza
  - ★ l'ipotesi fondamentale è che i rendimenti siano indipendenti su periodi diversi  $\Rightarrow$  estrazioni indipendenti dallo stesso campione
  - ★ lo schema di base può essere modificato per includere **correlazione seriale** dei rendimenti e **volatilità stocastica** (e.g. tramite process GARCH = Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

330

## VALUE-AT-RISK: BOOTSTRAP

- ▷ vantaggi:
  - ★ procedura non parametrica (**model-free**)  $\Rightarrow$  non richiede stima di parametri e scelta di un modello
  - ★ procedura semplice da implementare
  - ★ implicitamente include asimmetria e code pesanti
  - ★ si estende in maniera relativamente semplice al caso di autocorrelazione e/o volatilità stocastica
- ▷ svantaggi:
  - ★ molto sensibile alla lunghezza del data set: tipicamente si usano da 250 a 1000 osservazioni giornaliere (da 1 a 4 anni); per ottenere la stessa accuratezza del metodo parametrico sono richiesti campioni di dimensioni anche superiori
  - ★  $\Rightarrow$  serie temporali potrebbero non essere disponibili
  - ★ lunghe serie sono richieste per includere eventi estremi
  - ★ "Ghost feature": il metodo reagisce lentamente a variazioni nel rischio di mercato
  - ★ nel caso  $n$ -periodale la procedura può essere computazionalmente pesante

331



## VALUE-AT-RISK: LIMITI

- ▷ il Value-at-Risk non è **subadittiva**  $\Rightarrow$  non è **coerente**
- ▷ il Value-at-Risk **non descrive le perdite nella coda sinistra** della distribuzione del P&L
- ▷ Il Value-at-Risk non è **robusto** (vedi slide 324)
- ▷ Di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte  $\Rightarrow$  **Expected-Shortfall** viene usata spesso in pratica al posto del Value-at-Risk

332

## MISURE DI RISCHIO

- ▷ dato una perdita  $L$  (e.g.  $L = -\text{P\&L}$ ) indichiamo con  $\rho(L)$  la **misura di rischio** corrispondente ad  $L$
- ▷  $\rho(L)$  è il **capitale da allocare alla perdita (potenziale)  $L$  per renderla accettabile**
- ▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio dovrebbe soddisfare
  - ★ **no rip-off**:  $\rho(L) \leq \max L := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) = 1\}$ ; non si dovrebbe allocare più capitale della perdita massima
  - ★ **invarianza di distribuzione**:  $\rho(L)$  dipende da  $L$  solo attraverso  $F_L$ ; richiesta naturale, dato che osservazioni di  $L$  permettono di ricostruire solo  $F_L$
  - ★ **monotonia**:  $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$  se  $\text{Prob}(L_1 \leq L_2) = 1$ ; la perdita  $L_2$  non è mai inferiore a  $L_1 \Rightarrow$  richiede più capitale

333

## MISURE DI RISCHIO

- ▷ approccio **assiomatico**: stabilire proprietà ragionevoli che una misura di rischio dovrebbe soddisfare
  - ★ **Invarianza per traslazioni**:  $\rho(L + c) = \rho(L) + c$ ; se si aggiunge una perdita certa  $c$  ad  $L$ , si deve aumentare il capitale dello stesso ammontare
  - ★ **Sub-additività**:  $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$ 
    - beneficio della **diversificazione**
    - beneficio di una **fusione**
    - sistema di allocazione di capitale può essere **decentralizzato**
  - ★ **positiva omogeneità**:  $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$  per  $\lambda > 0$ ; non si penalizza per **rischio di concentrazione e liquidità**
  - ★ **convessità**:  $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$ ; diversificazione su composizioni di portafogli; ogni misura di rischio coerente è convessa
- ▷ una misura di rischio monotona, invariante per traslazioni, positivamente omogenea e sub-additiva si dice **coerente**

334

## MISURE DI RISCHIO

- ▷ Value-at-Risk soddisfa tutte le proprietà elencate tranne **subadditività (e convessità)**  $\Rightarrow$  esistono  $L_1, L_2$  tali che

$$\text{VaR}_\alpha^{L_1+L_2} > \text{VaR}_\alpha^{L_1} + \text{VaR}_\alpha^{L_2}$$

**aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente**

- ★ esempio: due bond soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
- ★ prezzo 90
- ★ valore facciale 100
- ★ perdita totale in caso di default
- ★ probabilità di default 4%
- ★ il default del primo e secondo bond sono indipendenti
- ★ riesce  $\text{VaR}_{95\%}^{L_1} = \text{VaR}_{95\%}^{L_2} = -10$  mentre  $\text{VaR}_{95\%}^{L_1+L_2} = 80$
- ▷ la proprietà di subadditività vale se  $L_1, L_2$  è **normale bivariata**

335

## MISURE DI RISCHIO

▷ Il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda sinistra della distribuzione del P&L

- ★ il  $\text{VaR}_\alpha$  stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad  $\alpha \Rightarrow$  non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano  $\text{VaR}_\alpha$
- ★ due perdite  $L_1, L_2$  possono avere lo stesso Value-at-Risk,  $\text{VaR}_\alpha^{L_1} = \text{VaR}_\alpha^{L_2}$  mentre le perdite in eccesso possono essere diverse

$$E[L_1 | L_1 \geq \text{VaR}_\alpha^{L_1}] \neq E[L_2 | L_2 \geq \text{VaR}_\alpha^{L_2}]$$

- ★ esempio:

$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \quad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\text{VaR}_{95\%}^{L_1} = \text{VaR}_{95\%}^{L_2} = 50,$$

$$E[L_1 | L_1 \geq \text{VaR}_{95\%}^{L_1}] = 54, \quad E[L_2 | L_2 \geq \text{VaR}_{95\%}^{L_2}] = 126$$

336

## EXPECTED SHORTFALL

▷ **Expected shortfall**: dato  $\text{P\&L} = -L$  con  $E|L| < +\infty$  ed un livello di confidenza  $0 < \alpha < 1$

$$\text{ES}_\alpha^{\text{P\&L}} = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_\beta^{\text{P\&L}} d\beta$$

- ★ a volte chiamato **Tail-Value-at-Risk**,  $\text{TVaR}_\alpha^{\text{P\&L}}$
- ★ media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a  $\alpha$  di assorbire le perdite
- ★ per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR

▷ proprietà

- ★ Expected shortfall soddisfa tutte le proprietà stabilite prima; in particolare è sub-additiva e coerente
- ★  $\text{ES}_\alpha \geq \text{VaR}_\alpha$ ,  $\text{ES}_\alpha$  funzione nondecreciente e continua di  $\alpha$

337

## EXPECTED SHORTFALL

- ▷ Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente:

$$ES_{\alpha}^{P\&L} = \frac{1}{1-\alpha} [E[L; L \geq \text{VaR}_{\alpha}^{P\&L}] + \text{VaR}_{\alpha}^{P\&L}(1-\alpha - \text{Prob}[L \geq \text{VaR}_{\alpha}^{P\&L}])]$$

dove  $E[X; A] = E[X1_A]$

- ▷ se la distribuzione di  $L$  è **continua**,  $\text{Prob}[L \geq \text{VaR}_{\alpha}^{P\&L}] = 1 - \alpha$  e quindi

$$ES_{\alpha}^{P\&L} = E[L|L \geq \text{VaR}_{\alpha}^{P\&L}]$$

⇒ ES = **perdite attese sopra il VaR**

338

## EXPECTED SHORTFALL

- ▷ approccio parametrico:  $R \sim N(\mu, \sigma^2)$  e quindi  $L = -R \sim N(-\mu, \sigma^2)$

★  $\text{VaR}_{\alpha}^R = -(\mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha))$

- ★ caso normale standard:  $\mu = 0, \sigma^2 = 1, \text{VaR}_{\alpha}^R = \Phi^{-1}(\alpha)$ , se  $\phi(z) = (2\pi)^{-1}e^{-z^2/2}$  è la densità della normale standard

$$ES_{\alpha}^R = E[L|L \geq \text{VaR}_{\alpha}^R] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)dz = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

- ★ nel caso generale,  $L \sim N(-\mu, \sigma^2)$

$$E[L|L \geq \text{VaR}_{\alpha}^R] = -\mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

339