Siano E_1, E_2, E_3 eventi tali che E_1, E_2 sono incompatibili, $E_3 \Rightarrow \overline{E}_1 \vee \overline{E}_2$ e $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{4}$.

a) Determinare la partizione generata da E_1, E_2, E_3;

b) verificare che la valutazione assegnata su $\{E_1, E_2\}$ è coerente

c) trovare i prolungamenti della valutazione data che attribuiscono probabilità positiva sulla partizione generata da E_1, E_2, E_3 e tale che E_3 sia correlato positivamente con E_1 e negativamente con E_2.

a) $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3' = \emptyset \quad (E_3' = E_3 \text{ o } \overline{E}_3)$

$\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3 = \emptyset$

Quindi: $P_6^{\emptyset}(E_1, E_2, E_3) = \{ \underbrace{E_1 \wedge E_3}_{\omega_1}, \underbrace{E_1 \wedge \overline{E}_3}_{\omega_2}, \underbrace{E_2 \wedge E_3}_{\omega_3}, \underbrace{E_2 \wedge \overline{E}_3}_{\omega_4}, \underbrace{\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2}_{\omega_5} \}$

b) $\mathbb{P}^{\emptyset}_{G}(E_1, E_2) = \{E_1, E_2, \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2\}$

- $P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$

$\Downarrow$

coerente

- $P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(Unico prolungamento su $\mathbb{P}^{\emptyset}_{G}(E_1, E_2)$)

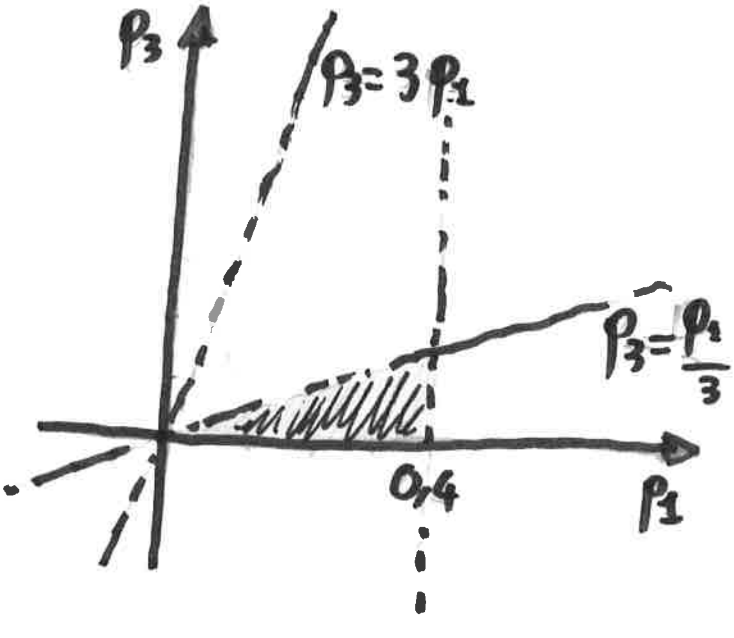
c) poniamo $p_i := P(w_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Risulta:

- $P(E_3 | E_1) > P(E_3) \iff p_1 > \frac{1}{4}(p_1 + p_3)$
- $P(\bar{E}_3 | E_2) < P(E_3) \iff p_3 < \frac{1}{4}(p_1 + p_3)$

Si ottiene:

$$\begin{cases} p_1 \in \left]0, \frac{1}{4}\right[, \\ p_3 \in \left]0, p_1/3\right[, \\ p_2 = \frac{1}{4} - p_1 , \\ p_4 = \frac{1}{4} - p_3 , \\ p_5 = \frac{1}{2} . \end{cases}$$



Siano E_1, E_2, E_3 eventi tali che $E_1 \Rightarrow E_2 \wedge \overline{E}_3$. Posto $\mathcal{A} = \{E_1|E_2, E_2|E_1, \overline{E}_3|E_2\}$.

Dire, quali delle seguenti 3 valutazioni sono probabilità coerenti su $\mathcal{A}$:

1) $P_1(E_1|E_2) = P_1(E_2|E_1) = P_1(\overline{E}_3|E_2) = \frac{1}{3}$

2) $P_2(E_1|E_2) = \frac{1}{4}$, $P_2(E_2|E_1) = 1$, $P_2(\overline{E}_3|E_2) = \frac{1}{2}$

3) $P_3(E_1|E_2) = P_3(E_2|E_1) = 1$, $P_3(\overline{E}_3|E_2) = \frac{1}{3}$

1) $E_2|E_1 = \Omega|E_1$.

Quindi: P_1 coerente $\rightarrow P_1(E_2|E_1) = 1 \neq \frac{1}{3}$ perciò P_1 non è coerente.

2) Consideriamo $\mathcal{A}' = \{E_1|E_2, \overline{E}_3|E_2\}$, e vediamo prima che P_2 è coerente su $\mathcal{A}'$.

$E_1 | E_2 \Rightarrow \overline{E}_3 | E_2 \rightarrow$ successione monotona di eventi

$P_2(E_1|E_2) \leq P_2(\overline{E}_3|E_2) \leq 1$

implica che P_2 è coerente su $\mathcal{A}'$.

. Ora, $\exists$ estensione coerente su $\mathcal{A}$, ma per forza (vedi p.to(1)) deve essere $P_2(E_2/E_1) = 1$. Quindi l'estensione è unica, e coincide con P_2.

3) $E_1 | E_2 \Rightarrow (E_2 \wedge \overline{E}_3) | E_2 = \overline{E}_3 | E_2$

Quindi $\underset{\underset{1/2}{\parallel}}{P_3(E_1/E_2)} \not\leq P_3(\overline{E}_3 | E_2) = 1/3$

P_3 <u>non è</u> coerente

Siano E_1, E_2 eventi logicamente indipendenti e sia data la probabilità P su $\{E_1, \bar{E}_1 \vee E_2\}$:

$$P(E_1) = 0{,}6 \quad , \quad P(\bar{E}_1 \vee E_2) = 0{,}5$$

a) verificare la coerenza di P.

$$P_\sigma^\emptyset(E_1, E_2) = \{\underbrace{E_1 \wedge E_2}_{w_1}, \underbrace{E_1 \wedge \bar{E}_2}_{w_2}, \underbrace{\bar{E}_1 \wedge E_2}_{w_3}, \underbrace{\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2}_{w_4}\}$$

$$p_i := P(w_i), \quad i = 1, \_\_\_, 4$$

$$\begin{cases} p_1 + p_3 + p_4 = P(\bar{E}_1 \vee E_2) = 0{,}5 \\ p_1 + p_2 = P(E_1) = 0{,}6 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_i \geq 0 \ , \ i = 1, \_\_, 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}1 \\ p_2 = 0{,}5 \\ p_3 = 0{,}4 - p_4 \\ p_4 \in [0, 0{,}4] \end{cases}$$

$\exists\ \infty$ soluzioni, quindi: P coerente

b) calcolare separatamente le limitazioni di probabilità per $E_1 | E_1 \vee E_2$ e $E_2 | E_1 \vee E_2$.

. $P(E_1 | E_1 \vee E_2) = \dfrac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2)} = \dfrac{0{,}6}{1 - p_4}$

monotona ↑ rispetto a p_4. Quindi:

max in $p_4 = 0{,}4$ (1), min in $p_4 = 0$ (0,6)

$\rightarrow P(E_1 | E_2 \vee E_2) \in [0{,}6, 1]$

. $P(E_2 | E_1 \vee E_2) = \dfrac{P(E_2)}{P(E_1 \vee E_2)} = \dfrac{0{,}5 - p_4}{1 - p_4}$

Ancora monotona decrescente in p_4.

min in $p_4 = 0{,}4$ ($1/6$), max in $p_4 = 0$ ($\frac{1}{2}$)

$\rightarrow P(E_2 | E_1 \vee E_2) \in [1/6, 1/2]$

c) Scegliere un prolungam. coerente su $\{E_1 | E_1 \vee E_2, E_2 | E_1 \vee E_2, E_2\}$

($p_4 = 0$) $P(E_2) = p_2 + p_3 = 0{,}5$

$P(E_1 | E_1 \vee E_2) = 0{,}6$, $P(E_2 | E_1 \vee E_2) = 0{,}5$

Siano E_1, E_2 due eventi s.i.,
$S_2 = |E_1| + |E_2|$.

a) Calcolare la distribuzione di probab. P sulla partizione generata da $\{E_1, E_2\}$ sapendo che $E(S_2) = 1$ e $var(S_2) = 3/8$

b) Sia E_3 t.c. $E_1 \wedge E_2 \Rightarrow E_3$ e $\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow \overline{E}_3$. Studiare i prolungamenti di P su E_3

a) $p_i = P(E_i)$, $i = 1,2$

$E(S_2) = p_1 + p_2$

$var(S_2) = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) = \frac{3}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_2 = 1 - p_1 \\ 2p_1(1-p_1) = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$2p_1^2 - 2p_1 + \frac{3}{8} = 0$$

$$p_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} 3/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

2 soluz.: $P(E_1) = \frac{1}{4}$, $P(E_2) = \frac{3}{4}$

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(\overline{E_1} \wedge \overline{E_2}) = \frac{3}{16}$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E_2}) = \frac{1}{16} \quad , \quad P(\overline{E_1} \wedge E_2) = \frac{9}{16}$$

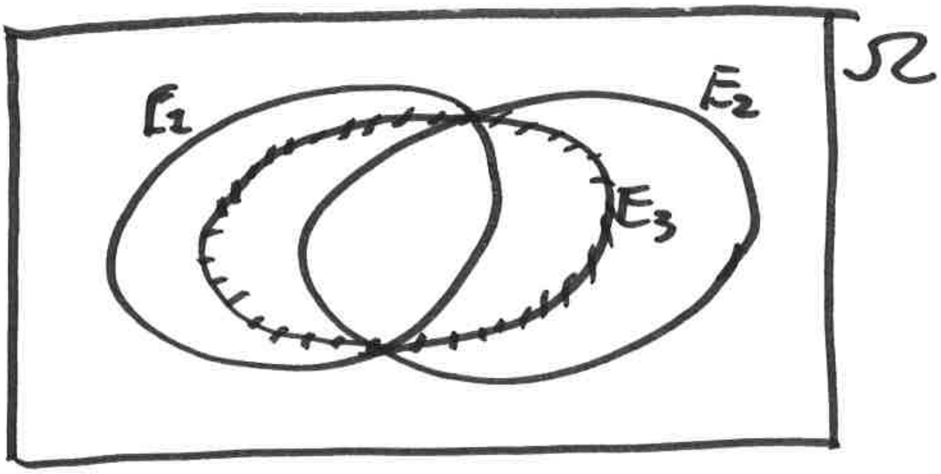
oppure:

$$P(E_1) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{3}{16} = P(\overline{E_1} \wedge \overline{E_2})$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E_2}) = \frac{9}{16} \quad , \quad P(\overline{E_1} \wedge E_2) = \frac{1}{16}$$

b)



$$\Big(E_* = E_1 \wedge E_2 \quad , \quad P(E_*) = \frac{3}{16}$$

$$\Big(E^* = (E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \overline{E_2}) \vee (\overline{E_1} \wedge E_2)$$

$$P(E^*) = \frac{13}{16} \longrightarrow \frac{3}{16} \leq P(E_3) \leq \frac{13}{16}$$