Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 17 giugno 2015

1. Da un'urna A contenente 8 palline bianche e 4 palline rosse si estraggono due palline, **senza rimetterle** nell'urna e **senza guardarne** il colore. Si procede poi a quattro estrazioni senza rimessa dall'urna B così ottenuta. Calcolare:

   - la probabilità che siano state eliminate da A due palline di medesimo colore, sapendo che sono state estratte due palline bianche;
   - la speranza matematica e la varianza del numero di palline bianche presenti nell'urna B alla fine delle estrazioni, sapendo che sono state eliminate da A due palline bianche.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nell'insieme

$$D = \{(x, y) :\ -2 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 4 - |x|\}$$

   con densità congiunta proporzionale alla funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ xy & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

   Calcolare la speranza matematica di X e dire per quali $t \geq 1$ risulta $\Pr(Y + tX \geq 0 | X \leq 0) = \frac{4}{9}$.

3. Considerati gli eventi E, F tali che $\Pr(E) = \frac{1}{3}$, $\Pr(F) = \frac{1}{2}$ e $\Pr(E|F) + \Pr(F|E) = \frac{4}{5}$, calcolare $\Pr(\overline{E} \vee \overline{F})$.

V

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 8 gennaio 2015

1. Un'urna contiene 4 palline bianche e 4 palline rosse. Si lancia due volte un dado equilibrato e si imbussola dopo ogni lancio una pallina rossa se esce il 2 oppure il 5, e due palline bianche, altrimenti. Si eseguono poi estrazioni senza rimessa dall'urna U così ottenuta. Considerati gli eventi:

$$E_n : \text{esce pallina bianca all'estrazione } n\text{-sima},$$

calcolare:

- $\Pr(E_i \mid E_1 \wedge \overline{E}_2)$ per $i, \cancel{j} \geq 1$;
- la speranza matematica e la varianza della v.a.:

$$Z : \text{ numero di palline bianche presenti nell'urna } U;$$

- determinare la probabilità che Z differisca dalla sua speranza matematica per meno di 2.

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel parallelogramma di vertici $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ con densità proporzionale alla funzione:

$$g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } x \geq 0 \\ y & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Calcolare:

- le densità marginali;
- $\Pr(X < 1)$;
- $\Pr(XY \leq \frac{1}{4} \mid X > 1)$.

3. Sia X una v.a. con speranza matematica e varianza finite. Determinare il punto di minimo della funzione $f(t) = \mathrm{E}[(X - t)^2]$.

Calcolo delle Probabilità

Prova Scritta, 16 settembre 2013

1. Date due urne U_1, U_2 - costituite da palline bianche e nere - sia p_i la percentuale di palline bianche nell'urna U_i $(i = 1, 2)$ e risulti $p_1 \neq p_2$. La selezione dell'urna avvenga mediante il lancio di una moneta equilibrata associando l'urna U_1 all'uscita di testa. Ciò posto, si considerino i seguenti due processi di estrazione:

   (a) si lanci la moneta e si estragga una pallina dall'urna selezionata rimettendola poi nell'urna dopo averla guardata. Si rilanci la moneta e si estragga una seconda pallina dall'urna selezionata;

   (b) si lanci la moneta e si proceda a due estrazioni con rimessa dall'urna selezionata.

   In quale dei due processi di estrazione è maggiore la probabilità che escano due palline bianche?

2. La coppia aleatoria (X, Y) è distribuita nel parallelogramma di vertici (1,0), (2,-1), (3,0) e (2,1) con densità congiunta $f(x, y) = \frac{x(y+1)}{4}$. Determinare:

   – la densità marginale di X;

   – la speranza matematica della v.a. $\frac{Y}{X}$;

   – $\Pr(X + 3Y \leq 0 \,|\, X \leq 2)$.

3. Posto $A \Delta B = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ per ogni coppia di eventi A e B, si verifichi che sussiste l'implicazione:

$$E \Delta F \rightarrow (E \Delta G) \vee (G \Delta F),$$

   qualunque siano gli eventi E, F e G.