Teoria dei gruppi

Outline

1. Struttura algebrica di gruppo: definizioni
   - Tabelle di moltiplicazione
   - Gruppi commutativi
2. Trasformazioni dei poligoni regolari in se
3. Gruppo simmetrico
4. Teorema del riarrangiamento
5. Isomorfismi e Omomorfismi
6. Sottogruppi
7. Classi di elementi coniugati
8. Il gruppo prodotto diretto

1. Struttura algebrica di gruppo: definizioni
   - Tabelle di moltiplicazione
   - Gruppi commutativi
2. Trasformazioni dei poligoni regolari in se
3. Gruppo simmetrico
4. Teorema del riarrangiamento
5. Isomorfismi e Omomorfismi
6. Sottogruppi
7. Classi di elementi coniugati
8. Il gruppo prodotto diretto

Struttura algebrica di gruppo

Definizioni

Set $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$ di elementi e una legge di composizione interna

- proprietà di chiusura: $G_i G_j \in \mathcal{G} \ \forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$
- proprietà associativa: $(G_i G_j)G_k = G_i(G_j G_k), \ \forall G_i, G_j, G_k \in \mathcal{G}$
- Esistenza dell' elemento identità: $G_i E = E G_i = G_i, \forall G_i \in \mathcal{G}$
- Esistenza dell' elemento inverso: $G_i(G_i^{-1}) = (G_i^{-1})G_i = E, \ \forall G_i \in \mathcal{G}$.

Gruppo abeliano

- La legge di composizione interna gode della proprietà commutativa: $G_i G_j = G_j G_i, \ \forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$

Struttura algebrica di gruppo

Esempi

- Il set $\{G, G^2 \equiv G \circ G = E\}$ è un gruppo
- Il set $C_n = \{C, C^2, \dots, C^{n-1}, C^n \equiv E\}$, è un gruppo (gruppo ciclico)
  - $C^k C^l = C^{k+l}$
  - C è il generatore del gruppo

Definizione

- ordine dell'elemento G: il più piccolo intero p tale che $G^p = E$
- elementi generatori: ogni elemento del gruppo $\mathcal{G}$ può essere espresso come prodotto tra generatori.

Struttura algebrica di gruppo

Tabella di moltiplicazione di un gruppo di ordine g

	G_1	G_2	$\cdots$	G_i	$\cdots$	G_g
G_1	$G_1 G_1$	$G_1 G_2$	$\cdots$	$G_1 G_i$	$\cdots$	$G_1 G_g$
G_2	$G_2 G_1$	$G_2 G_2$	$\cdots$	$G_2 G_i$	$\cdots$	$G_2 G_g$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
G_i	$G_i G_1$	$G_i G_2$	$\cdots$	$G_i G_i$	$\cdots$	$G_i G_g$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
G_g	$G_g G_1$	$G_g G_2$	$\cdots$	$G_g G_i$	$\cdots$	$G_g G_g$

- Riporta il risutato della moltiplicazione di due qualsiasi elementi del gruppo.
- $G_i G_j$: intersezione della riga G_i e della colonna G_j.

Struttura algebrica di gruppo

Tabella di moltiplicazione di un gruppo di ordine g

gruppo ciclico C_3

	E	C	C^2
E	E	C	C^2
C	C	C^2	E
C^2	C^2	E	C

gruppo ciclico C_4

	E	C	C^2	C^3
E	E	C	C^2	C^3
C	C	C^2	C^3	E
C^2	C^2	C^3	E	C
C^3	C^3	E	C	C^2

Struttura algebrica di gruppo

Il 4-gruppo

- X e Y elementi di ordine 2.
- X e Y commutano, $XY = YX$.
- Il set $\mathcal{V} = \{E, X, Y, XY\}$.

Tabella di moltiplicazione

	E	X	Y	XY
E	E	X	Y	XY
X	X	E	XY	Y
Y	Y	XY	E	X
XY	XY	Y	X	E

Struttura algebrica di gruppo

Gruppo commutativo (additivo)

Set $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$ di elementi e una legge di composizione interna

- proprietà di chiusura: $G_i + G_j \in \mathcal{G} \ \forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$
- proprietà associativa: $(G_i + G_j) + G_k = G_i + (G_j + G_k)$, $\forall G_i, G_j, G_k \in \mathcal{G}$
- Esistenza dell' elemento identità: $G_i + 0 = 0 + G_i = G_i, \forall G_i \in \mathcal{G}$
- Esistenza dell' elemento inverso: $G_i + (-G_i) = (-G_i) + G_i = 0$, $\forall G_i \in \mathcal{G}$.
- Proprietà commutativa: $G_i + G_j = G_j + G_i$, $\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$

Struttura algebrica di gruppo

I campi $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$

Il campo dei reali, $\mathbb{R}$

- gruppo additivo con l'ordinaria addizione
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ è un gruppo abeliano con l'ordinaria moltiplicazione
- La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} f_k(f_i + f_j) &= f_k f_i + f_k f_j \\ (f_k + f_j) f_i &= f_k f_i + f_j f_i \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}$ ha una struttura algebrica di campo

1 Struttura algebrica di gruppo: definizioni
- Tabelle di moltiplicazione
- Gruppi commutativi

2 Trasformazioni dei poligoni regolari in se

3 Gruppo simmetrico

4 Teorema del riarrangiamento

5 Isomorfismi e Omomorfismi

6 Sottogruppi

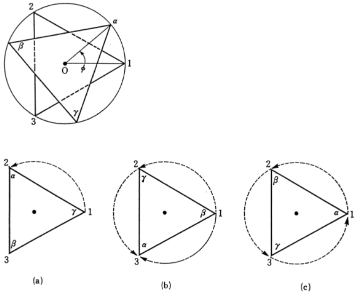
7 Classi di elementi coniugati

8 Il gruppo prodotto diretto

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

Triangolo equilatero



- triangolo fisso con vertici 123
- triangolo congruente $\alpha\beta\gamma$ che viene fatto ruotare

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

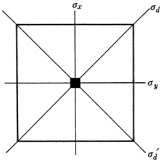
Triangolo equilatero

- Primo ricoprimento per $R(\frac{2\pi}{3})$ o C_3
- Secondo ricoprimento per $R(\frac{4\pi}{3}) = R(\frac{2\pi}{3})^2 \equiv C_3^2$ $(C_3^2 = R(-\frac{2\pi}{3}) = C_3^{-1})$
- La rotazione $\phi = 2\pi$ riporta il sistema in una posizione indistinguibile da quella con $\phi = 0$
- $R(3\frac{2\pi}{3}) = R(\frac{2\pi}{3})R(2\frac{2\pi}{3}) = R(0) = E$
- $C_3 = \{C_3, C_3^2 \equiv C_3^{-1}, C_3^3 \equiv E\}$: gruppo ciclico di ordine 3.

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

Quadrato

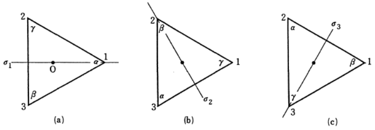


- Primo ricoprimento per $\phi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ o C_4
- Secondo ricoprimento per $\phi = 2\frac{\pi}{2} = \pi$ o $C_4^2 = C_2 = R(\pi)$
- Terzo ricoprimento per $C_4^3 = C_4^{-1} = R(-\frac{\pi}{2})$
- $C_4^4 = C_2^2 = R(2\pi) = R(0) \equiv E$
- $C_4 = \{C_4, C_4^2 \equiv C_2, C_4^3 \equiv C_4^{-1}, C_4^4 = C_2^2 = E\}$: gruppo ciclico di ordine 4.

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

Piani di simmetria



- Tre piani di simmetria perpendicolari al piano del triangolo (σ_1, σ_2 e σ_3).
- Passano per un vertice e bisecano il lato opposto

- Il set $\{E, C_3, C_3^2 \equiv C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forma il gruppo C_{3v}
- Tutti gli assiomi di gruppo sono soddisfatti.(Es: $\sigma_1 C_3 = \sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2 = C_3 \ldots$)

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

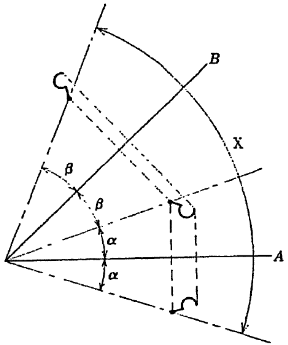
Gruppo C_{3v}: Tabella di moltiplicazione

	E	C_3	C_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^{-1}	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^{-1}	C_3^{-1}	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^{-1}	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^{-1}	E

- Gruppo di ordine 6.

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

Piani di simmetria e rotazioni



- I piani $\sigma_1 = A$ e $\sigma_2 = B$ formano un angolo $\theta = \alpha + \beta$.
- L'effetto dell'operazione $\sigma_2\sigma_1$ è una rotazione $R(2\theta)$.
- L'intersezione dei due piani di simmetria è l'asse di rotazione.

Formulazione matriciale delle operazioni di simmetria

Gruppo C_3v

Matrici di rotazione

$$\hat{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

- Assumiamo un sistema di riferimento OXYZ.
- L'asse di rotazione coincide con l'asse Z.
- ϕ: angolo di rotazione (positivo se in senso antiorario).

Esempio di rappresentazione di un gruppo

Gruppo C_3v

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{C}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{C}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

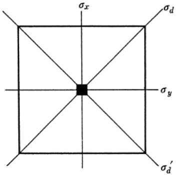
$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Le sei matrici 2×2 corrispondenti ai sei elementi del gruppo C_{3v}.
- Soddisfano la tabella di moltiplicazione del gruppo C_{3v}.

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

Il gruppo C_{4v}

Piani di simmetria del quadrato



- Il quadrato al centro simbolizza l'asse di rotazione C_4.
- σ_x e σ_y ortogonali agli assi x e y rispettivamente.
  - piani verticali
- σ_d e σ'_d bisecano gli angoli tra σ_x e σ_y
  - piani diedri

Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari

trasformazioni dei poligoni regolari in sè

Gruppo C_{4v}

- Il set $\{E, C_4, C_4^2 \equiv C_2, C_4^{-1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma_d'\}$ forma il gruppo C_{4v}.

Table 2.4. Multiplication table of the group C_{4v}

	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_x	σ_y	σ_d	σ_d'
E	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_x	σ_y	σ_d	σ_d'
C_4	C_4	C_2	C_4^{-1}	E	σ_d'	σ_d	σ_x	σ_y
C_2	C_2	C_4^{-1}	E	C_4	σ_y	σ_x	σ_d'	σ_d
C_4^{-1}	C_4^{-1}	E	C_4	C_2	σ_d	σ_d'	σ_y	σ_x
σ_x	σ_x	σ_d	σ_y	σ_d'	E	C_2	C_4	C_4^{-1}
σ_y	σ_y	σ_d'	σ_x	σ_d	C_2	E	C_4^{-1}	C_4
σ_d	σ_d	σ_y	σ_d'	σ_x	C_4^{-1}	C_4	E	C_2
σ_d'	σ_d'	σ_x	σ_d	σ_y	C_4	C_4^{-1}	C_2	E

1. Struttura algebrica di gruppo: definizioni
   - Tabelle di moltiplicazione
   - Gruppi commutativi
2. Trasformazioni dei poligoni regolari in se
3. **Gruppo simmetrico**
4. Teorema del riarrangiamento
5. Isomorfismi e Omomorfismi
6. Sottogruppi
7. Classi di elementi coniugati
8. Il gruppo prodotto diretto

Gruppo simmetrico

Permutazioni

Notazione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots p_n \end{pmatrix}$$

- Dati n oggetti, abbiamo $n!$ permutazioni.
- Il set delle permutazioni forma il gruppo simmetrico di grado n, $\mathcal{S}_n$.

Gruppo simmetrico

Permutazioni

Notazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dots & 2 & \dots n \\ p_1 & p_k & \dots & p_2 & \dots p_n \end{pmatrix}$$

- Insieme costituito da n oggetti numerati da 1 a n.
- Prima riga: lista degli elementi.
- Seconda riga: Oggetto sul sito p_i viene rilocato sul sito i a seguito della permutazione.
- L'ordine delle colonne non è importante.

Gruppo simmetrico

Composizione di permutazioni

Prodotto di due permutazioni

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots p_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots p_{q_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots p_{q_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Il prodotto di due permutazioni è ancora una permutazione.
- Il set di $n!$ permutazioni soddisfa gli assiomi di gruppo.

Gruppo simmetrico

Esempio: $\mathcal{S}_3$

Notazione alternativa: cicli

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \equiv E \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}.$$

- corrispondenza $1:1$ tra gli elementi di $\mathcal{S}_3$, e gli elementi di C_{3v}
- $\mathcal{S}_3$ e C_{3v} sono isomorfi.

Gruppo simmetrico

Esempio: $\mathcal{S}_3$

Tabella di moltiplicazione del gruppo $\mathcal{S}_3$

	E	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
E	E	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
(132)	(132)	(123)	E	(12)	(23)	(13)
(123)	(123)	E	(132)	(13)	(12)	(23)
(23)	(23)	(13)	(12)	E	(132)	(123)
(13)	(13)	(12)	(23)	(123)	E	(132)
(12)	(12)	(23)	(13)	(132)	(123)	E

1. Struttura algebrica di gruppo: definizioni
   - Tabelle di moltiplicazione
   - Gruppi commutativi
2. Trasformazioni dei poligoni regolari in se
3. Gruppo simmetrico
4. Teorema del riarrangiamento
5. Isomorfismi e Omomorfismi
6. Sottogruppi
7. Classi di elementi coniugati
8. Il gruppo prodotto diretto

Teorema del riarrangiamento

Teorema

Dato $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$ di ordine g, $\mathcal{G}G = \{G_1 G, G_2 G, \cdots, G_g G\}$ con $G \in \mathcal{G}$ e arbitrario, contiene i g elementi del gruppo $\mathcal{G}$. Ogni elemento del gruppo occorre solo una volta.

- $\mathcal{G}G$ è il gruppo stesso: $\mathcal{G}G \equiv \mathcal{G}$.
- È valido anche per il set $G\mathcal{G}$.
- Ogni riga o colonna della tabella di moltiplicazione contiene diversi riarrangiamenti di tutti gli elementi del gruppo.
- Formulazione equivalente:

$$\sum_{i=1}^{g} f(GG_i) = \sum_{i=1}^{g} f(G_i G) = \sum_{i=1}^{g} f(G_i)$$

1 Struttura algebrica di gruppo: definizioni
- Tabelle di moltiplicazione
- Gruppi commutativi

2 Trasformazioni dei poligoni regolari in se

3 Gruppo simmetrico

4 Teorema del riarrangiamento

5 Isomorfismi e Omomorfismi

6 Sottogruppi

7 Classi di elementi coniugati

8 Il gruppo prodotto diretto

Isomorfismo tra gruppi e Omomorfismo

Isomorfismo tra gruppi

Definizione

Dati due gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, con elementi G e G', se esiste una applicazione biunivoca $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tale che

- $f(G) = G'$, e tale che
- $G_i G_j = G_k \Longrightarrow G'_i G'_j = G'_k$,

allora i gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ sono detti isomorfi:

- $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$

Isomorfismo tra gruppi

Esempio

$C_{3v} \cong \mathcal{S}_3$

$$E \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv E \qquad C_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_3^{-1} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- I gruppi C_{3v} e $\mathcal{S}_3$ sono matematicamente identici
- Hanno la stessa tabella di moltiplicazione
    - Stessa struttura.

Isomorfismo tra gruppi e Omomorfismo

Omomorfismo tra gruppi

Definizione

Dati due gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, con elementi G e G', una applicazione $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ tale che:

- $f(G_i G_j) = f(G_i) f(G_j)$

è detta omomorfismo tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$.

- $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}'$

Proprietà

- Se E è l'elemento identità di $\mathcal{G}$, $f(E)$ è l'elemento identità di $\mathcal{G}'$.
- $f(G^{-1})$ è l'elemento inverso di $f(G)$.

Omomorfismo tra gruppi

Esempio

$C_{3v} \sim C_2 = \{C, C^2 = E\}$

Esiste un'omomorfismo, $f : C_{3v} \longrightarrow C_2$, tale che:

- $f(E, C_3, C_3^{-1}) = E$
- $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C$

- f associa a tre elementi di C_{3v} lo stesso elemento del gruppo C_2.
- f è una corrispondenza 3:1.
- Omomorfismo: corrisponzenza n:1, con $n \geq 1$.
- Se $n = 1$ abbiamo un'isomorfismo tra gruppi.

1 Struttura algebrica di gruppo: definizioni
- Tabelle di moltiplicazione
- Gruppi commutativi

2 Trasformazioni dei poligoni regolari in se

3 Gruppo simmetrico

4 Teorema del riarrangiamento

5 Isomorfismi e Omomorfismi

6 Sottogruppi

7 Classi di elementi coniugati

8 Il gruppo prodotto diretto

Sottogruppi

Sottogruppi propri e triviali

Definizione

Un sottogruppo $\mathcal{H}$ di un gruppo $\mathcal{G}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{G}$ che soddisfa gli assiomi di gruppo.

- Ogni gruppo $\mathcal{G}$ possiede due sottogruppi triviali:
  - $\mathcal{G}$ stesso
  - Il sottogruppo formato dall'elemento identità, E.
- Tutti gli altri sottogruppi (se esistono) di $\mathcal{G}$ sono detti sottogruppi propri

Condizioni necessarie e sufficienti:

- $\mathcal{H}$ è chiuso, ovvero $H_i H_j \in \mathcal{H}\ \forall H_i, H_j \in \mathcal{H}$.
- $\forall H_i \in \mathcal{H}\ \exists! H_i^{-1} \in \mathcal{H}$

Sottogruppi

Esempio

Sottogruppi propri di C_{3v}

- $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$
- $\{E, \sigma_1\}$
- $\{E, \sigma_2\}$
- $\{E, \sigma_3\}$

Sottogruppi

Esempio

Sottogruppi propri di C_{4v}

- $\{E, C_2\}$
- $\{E, C_4, C_2, C_4^{-1}\}$; $\{E, \sigma_x\}$,
- $\{E, \sigma_y\}$; $\{E, \sigma_d\}$;
- $\{E, \sigma'_d\}$;$\{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\}$,
- $\{E, C_2, \sigma_d, \sigma'_d\}$

1 Struttura algebrica di gruppo: definizioni
- Tabelle di moltiplicazione
- Gruppi commutativi

2 Trasformazioni dei poligoni regolari in se

3 Gruppo simmetrico

4 Teorema del riarrangiamento

5 Isomorfismi e Omomorfismi

6 Sottogruppi

7 Classi di elementi coniugati

8 Il gruppo prodotto diretto

Classi di elementi coniugati

Definizioni e proprietà

Elementi coniugati

Dato un gruppo $\mathcal{G}$ e due suoi elementi, $A, B \in \mathcal{G}$, B è detto elemento coniugato ad A, se esiste un elemento $G \in \mathcal{G}$ tale che: $B = GAG^{-1}$.

Relazione di equivalenza

- Ogni elemento è coniugato a se stesso (proprietà riflessiva)
- Se B è coniugato ad A, allora A è coniugato a B (proprietà simmetrica).
- Se B è coniugato ad A, e C è coniugato a B, allora C è coniugato ad A (proprietà transitiva)

Classi di elementi coniugati

Definizioni e proprietà

Classi

Dato un qualsiasi elemento del gruppo, $A \in \mathcal{G}$, il set di tutti gli elementi coniugati ad A è detto classe.

- Classi differenti non hanno elementi in comune.
- E costituisce una classe con se stesso, $E \equiv \mathcal{C}_1$.
- In gruppi abeliani, ogni elemento forma una classe a se stante.
    - Il numero di classi è uguale all'ordine del gruppo.

Classi di elementi coniugati

Raggruppamento degli elementi in classi

1. Si prende un'elemento rappresentativo $A \in \mathcal{G}$.
2. Si formano i prodotti $A, G_2 A G_2^{-1}, \ldots, G_g A G_g^{-1}$.
3. Tutti questi elementi (non necessariamente distinti) appartengono alla stessa classe.

Classi di elementi coniugati

Esempio: gruppo C_{4v}

Classi del gruppo $C_4 v$

Table 2.6. Calculation of the sequence (2.23)

A	$G\,A\,G^{-1}$ \ G	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_x	σ_y	σ_d	σ_d'
E	$G\,E\,G^{-1}$	E	E	E	E	E	E	E	E
C_2	$G\,C_2\,G^{-1}$	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2
C_4	$G\,C_4\,G^{-1}$	C_4	C_4	C_4	C_4	C_4^{-1}	C_4^{-1}	C_4^{-1}	C_4^{-1}
σ_x	$G\,\sigma_x\,G^{-1}$	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_y	σ_y
σ_d	$G\,\sigma_d\,G^{-1}$	σ_d	σ_d'	σ_d	σ_d'	σ_d'	σ_d'	σ_d	σ_d

Classi di elementi coniugati

Esempio: gruppo C_{4v}

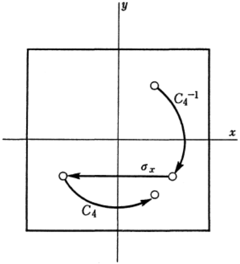
Classi del gruppo $C_4 v$

Classe	Elementi nella classe	Numero di elementi, h_k
$\mathcal{C}_1$	E	1
$\mathcal{C}_2$	C_2	1
$\mathcal{C}_3$	C_4, C_4^{-1}	2
$\mathcal{C}_4$	σ_x, σ_y	2
$\mathcal{C}_5$	σ_d, σ'_d	2

Classi di elementi coniugati

Esempio: gruppo C_{4v}

Considerazioni geometriche



- $C_4 \sigma_x C_4^{-1} = \sigma_y$. σ_x e σ_y appartengono alla stessa classe.
  - C_4 porta σ_x in σ_y, σ_d in σ'_d.
  - Non esistono elementi che portano σ_x in σ_d.
- Elementi coniugati sono operazioni geometricamente equivalenti

1. Struttura algebrica di gruppo: definizioni
   - Tabelle di moltiplicazione
   - Gruppi commutativi
2. Trasformazioni dei poligoni regolari in se
3. Gruppo simmetrico
4. Teorema del riarrangiamento
5. Isomorfismi e Omomorfismi
6. Sottogruppi
7. Classi di elementi coniugati
8. Il gruppo prodotto diretto

Il gruppo prodotto diretto

Definizioni

Prodotto diretto di due gruppi

Dati due gruppi, $\mathcal{A} = \{A_1 \equiv E_{\mathcal{A}}, A_2, \ldots, A_g\}$ di ordine g, e $\mathcal{B} = \{B_1 \equiv E_{\mathcal{B}}, B_2, \ldots, B_l\}$ di ordine l, e tali che i loro elementi commutino:

- $A_i B_j = B_j A_i$

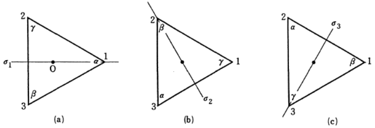
allora il set di gl elementi $A_i B_j$ formano un gruppo.

- gruppo prodotto diretto: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
- La moltiplicazione è definita come:
  - $(A_i B_j)(A_{i'} B_{j'}) = (A_i A_{i'})(B_j B_{j'}) = A_{i''} B_{j''}$

Il gruppo prodotto diretto

Esempio

Triangolo equilatero



- Addizionale elemento di simmetria: piano di simmetria coincidente con il piano del triangolo
  - piano di simmetria orizzontale, σ_h
  - Se non distinguiamo tra le due facce del triangolo
- $C_{1h} = \{\sigma_h, \sigma_h^2 \equiv E\}$, gruppo ciclico di ordine 2.
- Gli elementi di C_{1h} e C_{3v} commutano.

Il gruppo prodotto diretto

Esempio

Gruppo $D_{3h} = C_{3v} \times C_{1h}$

$$C_{3v} \times C_{1h} = \begin{cases} E,\, C_3,\, C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \sigma_h,\, C_3\sigma_h,\, C_3^{-1}\sigma_h, \sigma_1\sigma_h, \sigma_2\sigma_h, \sigma_3\sigma_h \end{cases}$$

- $\sigma_i\sigma_h = U_i$, $i = 1, 2, 3$ è una rotazione di un'angolo di π
  - Asse di rotazione C_2.
  - Intersezione tra σ_i e σ_h.

Il gruppo prodotto diretto

Esempio

Gruppo $D_{3h} = D_3 \times C_{1h}$

$$C_{3v} \times C_{1h} = \begin{cases} E, C_3, C_3^{-1}, U_1\sigma_h, U_2\sigma_h, U_3\sigma_h \\ \sigma_h, C_3\sigma_h, C_3^{-1}\sigma_h, U_1, U_2, U_3 \end{cases}$$

- Dal momento che $\sigma_i = U_i\sigma_h$.
- $D_3 = \{E, C_3, C_3^{-1}, U_1, U_2, U_3\}$.