Teoria dei gruppi

Daniele Toffoli

June 5, 2017

1 Definizione di gruppo

Consideriamo un set $\mathcal{G}$ di elementi distinti $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$. L'insieme $\mathcal{G}$ è detto costituire un *gruppo*, se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

G1: possiamo definire un'operazione "$\circ$" (detta *prodotto*) tale che $G_i \circ G_j \in \mathcal{G}$ $\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$ (proprietà di chiusura). Nel proseguio ometteremo il simbolo $\circ$

G2: L'operazione gode della proprietà associativa: $(G_iG_j)G_k = G_i(G_jG_k)$, $\forall G_i, G_j, G_k \in \mathcal{G}$

G3: Esiste un unico elemento (detto *identità* o elemento unità), E, tale che, $G_iE = EG_i = G_i, \forall G_i \in \mathcal{G}$

G4: $\forall G_i \in \mathcal{G}$ esiste un unico elemento inverso, G_i^{-1}, tale che $G_i(G_i^{-1}) = (G_i^{-1})G_i = E$

Gli elementi G_i sono detti *elementi del gruppo*. I gruppi possono avere un numero finito di elementi, nel qual caso sono chiamati *gruppi finiti*, oppure un numero infinito di elementi (*gruppi infiniti*). Per i gruppi finiti, il numero degli elementi del gruppo viene chiamato *ordine del gruppo*. L' operazione che conferisce al set di elementi la struttura algebrica di gruppo non necessariamente gode della proprietà commutativa. Se però l'operazione è commutativa

G5: $G_iG_j = G_jG_i$, $\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$

allora il gruppo $\mathcal{G}$ è chiamato *gruppo abeliano* o *gruppo commutativo*.

Esempi

1. Il set di elementi $\{G, G^2 \equiv G \circ G = E\}$ soddisfa gli assiomi di gruppo. Infatti il set è chiuso, esiste l'elemento identità, E, l'elemento inverso di G è G stesso. L'operazione è associativa.

2. Il set $C_n = \{C, C^2, \ldots, C^{n-1}, C^n \equiv E\}$, costituisce un gruppo se l'operazione di moltiplicazione degli elementi è definita come $C^kC^l = C^{k+l}$. La moltiplicazione è chiaramente associativa (dal momento che la somma di interi

è associativa), l'elemento inverso di C^m è C^{n-m} che appartiene al gruppo, esiste l'elemento identità e l'insieme è chiuso rispetto alla moltiplicazione. Inoltre l'operazione è commutativa. Questo gruppo è chiamato *gruppo ciclico di ordine* n, ed è un gruppo abeliano.

Definizione: Sia G un' elemento del gruppo $\mathcal{G}$. Il più piccolo intero p che soddisfa l'equazione $G^p = E$, è chiamato *ordine* dell'elemento G.

1.1 Tabelle di moltiplicazione

La struttura di un gruppo diventa chiara quando si costruisce una tabella che indica il risutato della moltiplicazione di due qualsiasi elementi del gruppo. Considera un gruppo finito $\mathcal{G}$ di ordine g. La sua tabella di moltiplicazione è presentata in Tabella 1. La tabella si costruisce considerando tutti i possibili risultati dell'operazione del gruppo applicata alle g^2 coppie di elementi. In corrispondenza dell'intersezione della riga G_i e della colonna G_j si mette il risultato G_iG_j.

Table 1: Tabella di moltiplicazione di un gruppo di ordine g.

	G_1	G_2	$\cdots$	G_i	$\cdots$	G_g
G_1	G_1G_1	G_1G_2	$\cdots$	G_1G_i	$\cdots$	G_1G_g
G_2	G_2G_1	G_2G_2	$\cdots$	G_2G_i	$\cdots$	G_2G_g
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
G_i	G_iG_1	G_iG_2	$\cdots$	G_iG_i	$\cdots$	G_iG_g
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
G_g	G_gG_1	G_gG_2	$\cdots$	G_gG_i	$\cdots$	G_gG_g

Esempio. La tabella di moltiplicazione del gruppo ciclico C_3 è riportata in Tabella 2 mentre la tabella di moltiplicazione del gruppo ciclico C_4 è riportata in Tabella 3.

Table 2: Tabella di moltiplicazione del gruppo ciclico C$_3$.

	E	C	C^2
E	E	C	C^2
C	C	C^2	E
C^2	C^2	E	C

Table 3: Tabella di moltiplicazione del gruppo ciclico C_4.

	E	C	C^2	C^3
E	E	C	C^2	C^3
C	C	C^2	C^3	E
C^2	C^2	C^3	E	C
C^3	C^3	E	C	C^2

1.2 Elementi generatori

Nel caso di un gruppo ciclico, come il gruppo C_3 o C_4 visti sopra, ogni elemento del gruppo può essere espresso come una certa potenza di un unico elemento, detto *elemento generatore*. In generale, se ogni elemento del gruppo $\mathcal{G}$ può essere espresso come prodotto di un numero ristretto di elementi distinti, questi elementi sono chiamati *elementi generatori* del gruppo. In generale, la scelta degli elementi generatori non è univoca.

Esercizio: Siano X e Y elementi di ordine 2. Mostra che se X e Y commutano, $XY = YX$, il set $\mathcal{V} = \{E, X, Y, XY\}$ costituisce un gruppo. Il gruppo è chiamato *il 4-gruppo*, ed ha come elementi generatori X e Y. La proprietà di chiusura del set è manifesta se costruiamo la sua tabella di moltiplicazione, riportata in Tabella 4. Nel costruire la tabella abbiamo usato la proprietà commutativa e la proprietà associativa del prodotto (ad esempio $(XY)X = Y(XX) = Y$). E è l'elemento identità, $X^{-1} = X$, $Y^{-1} = Y$, $(XY)^{-1} = XY$.

Table 4: Tabella di moltiplicazione del 4-gruppo.

	E	X	Y	XY
E	E	X	Y	XY
X	X	E	XY	Y
Y	Y	XY	E	X
XY	XY	Y	X	E

1.3 Gruppi commutativi

Quando l'operazione che conferisce al set la struttura di gruppo è commutativa, è d'uso simboleggiare l'operazione con il simbolo "+" invece che "$\circ$". I cinque assiomi di gruppo possono quindi essere scritti come:

A1: possiamo definire un'operazione "+" (detta *somma*) tale che $G_i + G_j \in \mathcal{G}$, $\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$ (proprietà di chiusura)

A2: L'operazione gode della proprietà associativa: $(G_i + G_j) + G_k = G_i + (G_j + G_k)$, $\forall G_i, G_j, G_k \in \mathcal{G}$

A3: Esiste un unico elemento neutro, 0, tale che, $G_i + 0 = 0 + G_i = G_i$, $\forall G_i \in \mathcal{G}$

A4: $\forall G_i \in \mathcal{G}$ esiste un unico elemento inverso, $-G_i$, tale che $G_i + (-G_i) = -G_i + G_i = 0$

A5: L'operazione "+" gode della proprietà commutativa: $G_i + G_j = G_j + G_i$, $\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$

Il gruppo è chiamato *gruppo additivo*. Non è altro che un gruppo abeliano in cui l'operazione è l'addizione. Sia il set di numeri reali $\mathbb{R}$ che dei numeri complessi $\mathbb{C}$ hanno una struttura di gruppo additivo sotto l'ordinaria addizione di numeri reali o complessi. Rispetto alla ordinaria moltiplicazione, il set dei numeri reali non è chiuso, dal momento che il reciproco f_i^{-1} dell'elemento f_i non esiste quando $f_i = 0$. Ma il set $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ è un gruppo abeliano con l'operazione di moltiplicazione. La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} f_k(f_i + f_j) &= f_k f_i + f_k f_j \\ (f_k + f_j) f_i &= f_k f_i + f_j f_i \end{aligned}$$

Il set $\mathbb{R}$, che ha la struttura di gruppo additivo rispetto alla somma, tale che la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma, mentre il set $\mathbb{R}^*$ è un gruppo abeliano rispetto alla ordinaria moltiplicazione, è detto avere struttura algebrica di *campo*. Anche il set di numeri complessi $\mathbb{C}$, con le operazioni di somma e moltiplicazione, ha una struttura algebrica di campo.

2 Operazioni di ricoprimento dei poligoni regolari (trasformazioni dei poligoni regolari in sè)

Un semplice esempio di gruppo può essere illustrato considerando le operazioni di ricoprimento di un triangolo equilatero, mostrato in Figura 1.

Nella figura possiamo distinguere un triangolo fisso con vertici 123, su cui un triangolo congruente di vertici $\alpha\beta\gamma$ viene fatto ruotare. Adesso ruotiamo il triangolo di vertici $\alpha\beta\gamma$ e guardiamo ai valori dell'angolo di rotazione ϕ per i quali i due triangoli sono in perfetta coincidenza. Supponiamo che la rotazione avvenga in senso antiorario. Il primo ricoprimento si ottiene quando l'angolo di rotazione $\phi = \frac{2\pi}{3}$. La corrispondente operazione di rotazione può essere scritta come $R(\frac{2\pi}{3})$ oppure come C_3. La notazione C_n di un operatore di rotazione (e del corrispondente elemento di simmetria) identifica l'angolo di rotazione come $\phi = \frac{2\pi}{n}$. n è anche detto *ordine* dell' asse di rotazione. Il secondo ricoprimento si ottiene per $\phi = 2 \times \frac{2\pi}{3}$ e l'operazione può essere scritta come $R(\frac{4\pi}{3}) = R(\frac{2\pi}{3})^2 \equiv C_3^2$. Questo secondo ricoprimento può essere ottenuto

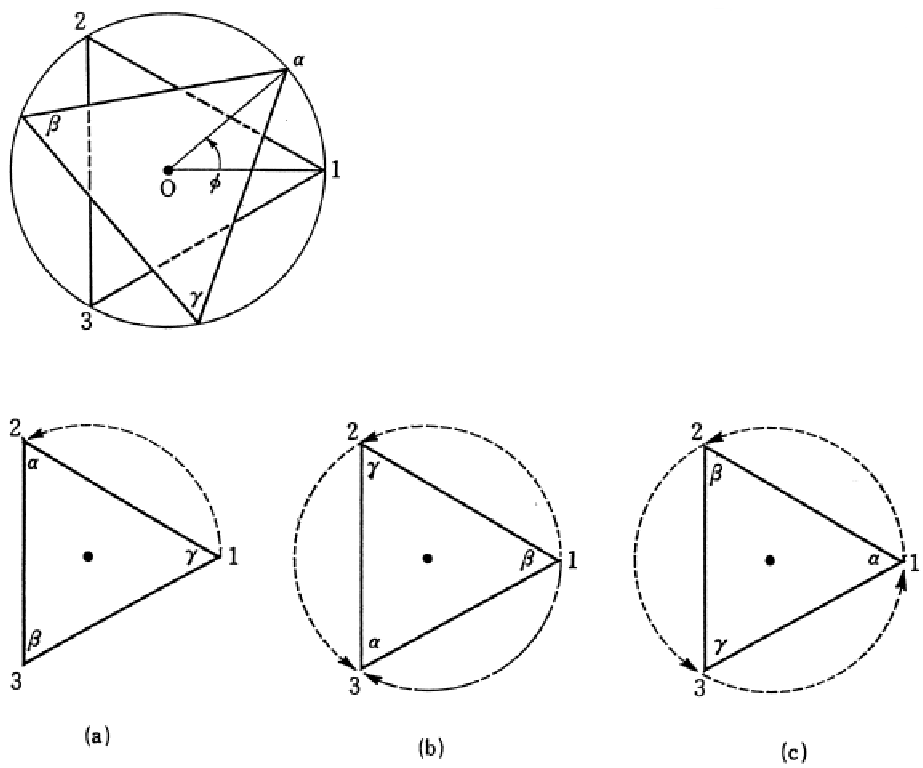

Figure 1: Operazioni di simmetria di un triangolo equilatero in sè.

anche per una rotazione in senso orario di $\frac{2\pi}{3}$. Se assegnamo valori positivi all' angolo ϕ quando la rotazione è in senso antiorario, e negativi quando il senso della rotazione è orario, abbiamo che $C_3^2 = R(-\frac{2\pi}{3}) = C_3^{-1}$ dal momento che chiaramente $R(-\frac{2\pi}{3})R(\frac{2\pi}{3}) = R(\frac{2\pi}{3})R(-\frac{2\pi}{3}) = R(0) = E$. L'ultimo ricoprimento, che si ottiene per $\phi = 2\pi$ riporta il sistema dei due triangoli in una posizione indistinguibile da quella ottenuta con $\phi = 0$. Quindi abbiamo la relazione $R(3\frac{2\pi}{3}) = R(\frac{2\pi}{3})R(2\frac{2\pi}{3}) = R(0) = E$ ovvero $C_3^3 = C_3C_3^2 = E$. Il set delle operazioni $C_3 = \{C_3, C_3^2 \equiv C_3^{-1}, C_3^3 \equiv E\}$, costituisce un gruppo ciclico di ordine 3.

Allo stesso modo è possibile discutere la simmetria rotazionale di un quadrato attorno al proprio centro. Il primo ricoprimento si ha per $\phi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ e la corrispondente operazione viene indicata con $R(\frac{\pi}{2}) = C_4$. La seconda operazione di ricoprimento si ottiene per rotazione di $\phi = 2\frac{\pi}{2} = \pi$ e l'operazione di rotazione è $C_4^2 = C_2 = R(\pi)$. La terza posizione di coincidenza si ha per l'operazione $C_4^3 = C_4^{-1} = R(-\frac{\pi}{2})$. Una rotazione di 2π riporta il sistema dei due quadrati in una posizione indistinguibile da quella ottenuta quando $\phi = 0$. Quindi $C_4^4 = C_2^2 = R(2\pi) = R(0) \equiv E$. Il gruppo delle operazioni $C_4 = \{C_4, C_4^2 \equiv C_2, C_4^3 \equiv C_4^{-1}, C_4^4 = C_2^2 = E\}$, costituisce un gruppo ciclico di ordine 4. L esistenza dell'asse di simmetria C_4 di ordine 4 determina le proprietà di simmetria dell'oggetto.

Finora ci siamo limitati alle rotazioni come operazioni di ricoprimento, ma chiaramente sia il triangolo equilatero che il quadrato posseggono piani di simmetria. Il triangolo equilatero possiede 3 piani di simmetria perpendicolari al piano del triangolo, e che passano per un vertice e bisecano il lato opposto, come riportato in Figura 2.

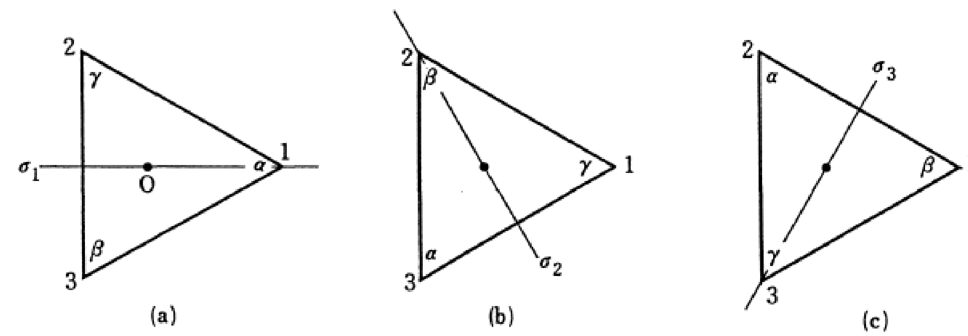

Figure 2: Piani di simmetria in un triangolo equilatero e l'effetto delle operazioni di riflessione sul triangolo di vertici $\alpha\beta\gamma$.

Il simbolo usato per questo elemento di simmetria, e per l'operazione associata è σ. Gli elementi di simmetria σ_1, σ_2 e σ_3 sono indicati in Figura 2. Il set di operazioni

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2 \equiv C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{1}$$

è chiuso rispetto al prodotto. A titolo di esempio:

$$\sigma_1 C_3 = \sigma_2 \tag{2}$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = C_3. \tag{3}$$

Inoltre, ogni elemento possiede un elemento inverso (per esempio $\sigma_1^{-1} = \sigma_1$, ecc.). La moltiplicazione è associativa e l'elemento unità è l'operazione identità. La tabella di moltiplicazione del gruppo è riportata qui sotto per completezza.

La Figura 3 presenta una giustificazione grafica del seguente risultato generale: se due piani di simmetria $\sigma_1 = A$ e $\sigma_2 = B$ formano un angolo $\theta = \alpha + \beta$, l'effetto dell'operazione $\sigma_2\sigma_1$ è una rotazione $R(2\theta)$ di un angolo 2θ, il cui asse

Table 5: Tabella di moltiplicazione del gruppo C_{3v}.

	E	C_3	C_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
E	E	C_3	C_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^{-1}	E	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^{-1}	C_3^{-1}	E	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	E	C_3	C_3^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	C_3^{-1}	E	C_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^{-1}	E

di rotazione è l'intersezione dei due piani di simmetria. In particolare, per $\theta = \frac{\pi}{3}$ si ottiene $\sigma_1\sigma_2 = C_3$.

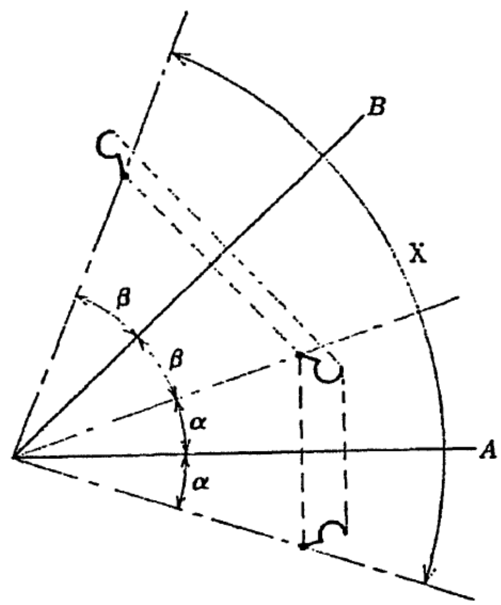

Figure 3:

Risulterà conveniente in seguito discutere l'effetto delle operazioni di simmetria in modo analitico, attraverso l'uso delle matrici. In tutta generalità assumiamo un sistema di riferimento OXYZ tale che l'asse di rotazione (C_2, C_3 o C_4 nella precedente discussione) coincide con l'asse Z, mentre i piani di simmetria (σ_1, σ_2 e σ_3) contengono l'asse Z (sono chiamati *piani verticali* dal momento che contengono l'asse di rotazione che è appunto detto *asse verticale*) e sono quindi ortogonali al piano XY. L'operatore di rotazione $R(\phi)$ che ruota le coordinate (x, y) dei punti del piano di un angolo ϕ (qui supponiamo che valori positivi corrispondano a rotazioni di senso antiorario), può essere rappresentato dalla matrice 2×2:

$$\hat{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{4}$$

Infatti, se il punto P del piano XY, di coordinate generiche (x, y) forma un angolo α con l'asse delle X, possiamo scrivere in coordinate polari, $x = r\cos\alpha$ e $y = r\sin\alpha$. A seguito di una rotazione ϕ, il punto $P' = R(\phi)P$ avrà coordinate (x', y') date da:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\phi) = r(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi) = x\cos\phi - y\sin\phi \\ y' &= r\sin(\alpha+\phi) = r(\cos\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi) = x\sin\phi + y\cos\phi \end{aligned}$$

Quindi, arrangiando le coordinate di P e P' in matrici colonna possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \hat{R}(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

con $\hat{R}(\phi)$ data dall'Eq. (4). Con ragionamenti simili si possono ricavare le matrici rappresentative 2×2 delle operazioni di riflessione rispetto ai piani di simmetria verticali. Ad esempio per l'operazione σ_1 la matrice $\hat{\sigma}_1$ è una matrice diagonale:

$$\hat{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Le sei matrici 2×2 che corrispondono ai sei elementi del gruppo C_{3v} sono presentate qui sotto:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{C}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{C}_3^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che le sei matrici sopra soddisfano la tabella di moltiplicazione del gruppo C_{3v} usando come operazione la moltiplicazione matriciale (riga per colonna). Esse infatti provvedono una *rappresentazione irriducibile* del gruppo C_{3v}, come vedremo meglio in seguito. A titolo di esempio:

$$\hat{\sigma_1}\hat{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_2. \tag{7}$$

Esercizio In addizione alle operazioni di rotazione generate dall'elemento C_4, il quadrato possiede quattro piani di simmetria, indicati con σ_x, σ_y, σ_d e σ'_d nella figura 4.

I piani σ_x e σ_y sono equivalenti per simmetria, essendo relazionati dall'operazione C_4, che porta per esempio σ_y in σ_x. Allo stesso modo σ_d e σ'_d sono equivalenti,

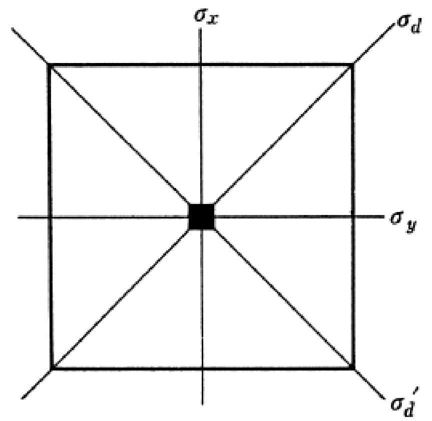

Figure 4: Piani di simmetria di un quadrato. Il quadrato al centro simbolizza l'asse di rotazione C_4, ortogonale alla pagina del foglio. I piani di simmetria σ_x e σ_y sono i piani di riflessione ortogonali all'asse delle x e y rispettivamente.

ma non esiste nessuna operazione di simmetria che leghi questi due set distinti di operazioni. I primi, sono chiamati piani verticali, mentre i secondi, che bisecano gli angoli tra due piani verticali, sono chiamati *piani diedri.* Il set di operazioni

$$C_{4v} = \{E, C_4, C_4^2 \equiv C_2, C_4^{-1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma_d'\} \tag{8}$$

costituisce un gruppo di ordine 8 con la tabella di moltiplicazione riportata qui sotto:

Table 2.4. Multiplication table of the group C_{4v}

	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_x	σ_y	σ_d	σ_d'
E	E	C_4	C_2	C_4^{-1}	σ_x	σ_y	σ_d	σ_d'
C_4	C_4	C_2	C_4^{-1}	E	σ_d'	σ_d	σ_x	σ_y
C_2	C_2	C_4^{-1}	E	C_4	σ_y	σ_x	σ_d'	σ_d
C_4^{-1}	C_4^{-1}	E	C_4	C_2	σ_d	σ_d'	σ_y	σ_x
σ_x	σ_x	σ_d	σ_y	σ_d'	E	C_2	C_4	C_4^{-1}
σ_y	σ_y	σ_d'	σ_x	σ_d	C_2	E	C_4^{-1}	C_4
σ_d	σ_d	σ_y	σ_d'	σ_x	C_4^{-1}	C_4	E	C_2
σ_d'	σ_d'	σ_x	σ_d	σ_y	C_4	C_4^{-1}	C_2	E

3 Gruppo delle permutazioni (gruppo simmetrico)

Dati n oggetti, il numero delle loro permutazioni è pari a $n!$. Il set delle permutazioni di n oggetti forma un gruppo di ordine $n!$, detto *gruppo simmetrico* o *gruppo delle permutazioni* di grado n, ed è denotato con $\mathcal{S}_n$. Introduciamo la notazione standard per le permutazioni. Supponiamo che il nostro insieme sia costituito da n oggetti numerati da 1 a n. Nella notazione *a due linee*, la lista di elementi è posta nella prima riga, e per ogni elemento della prima riga, la sua immagine sotto la permutazione è riportata nella seconda riga. Per esempio, se a seguito di una particolare permutazione di 3 oggetti abbiamo la seguente corrispondenza: $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$, (ovvero a seguito della permutazione l'oggetto sul sito 3 viene rilocato in 1, l'oggetto sul sito 1 viene rilocato in 3) la notazione usata è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

In generale, per una permutazione di n oggetti scriveremo:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dal momento che la prima riga rappresenta solamente la lista di elementi, l'ordine delle colonne non è importante, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dots & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_k & \dots & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

È possibile comporre due o più permutazioni, ovvero fare il loro prodotto. Supponiamo di avere due permutazioni, P e Q:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nel fare il prodotto QP, riarrangiamo le colonne della permutazione P in modo tale che l'ordine della lista di elementi (la prima riga) coincida con la seconda riga della permutazione Q. La permutazione $R = QP$ si ottiene quindi come nell' esempio:

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots & p_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q_n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \dots & p_{q_k} & \dots & p_{q_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

Vedremo in seguito che si può stabilire una corrispondenza 1 : 1 tra gli elementi del gruppo delle permutazioni di 3 oggetti, $\mathcal{S}_3$, e gli elementi del gruppo C_{3v}. Per il momento, ci limiteremo a fare una lista delle 6 permutazioni, e a dimostrare che il set soddisfa gli assiomi di gruppo. Introduciamo anche una notazione alternativa abbreviata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = () \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente l'identità è $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. La proprietà di chiusura diventa manifesta una volta esaminata la tabella di moltiplicazione del gruppo, riportata in Tabella 6. I prodotti si valutano in accordo all'equazione (12). Per esempio:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Table 6: Tabella di moltiplicazione del gruppo $\mathcal{S}_3$.

	E	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
E	E	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
(132)	(132)	(123)	E	(12)	(23)	(13)
(123)	(123)	E	(132)	(13)	(12)	(23)
(23)	(23)	(13)	(12)	E	(132)	(123)
(13)	(13)	(12)	(23)	(123)	E	(132)
(12)	(12)	(23)	(13)	(132)	(123)	E

4 Teorema del riarrangiamento

Teorema: Considera un gruppo $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$ di ordine g. Se moltiplichiamo ogni elemento di $\mathcal{G}$ alla destra con un arbitrario elemento $G \in \mathcal{G}$, otteniamo il set:

$$\mathcal{G}G = \{G_1G, G_2G, \cdots, G_gG\} \tag{14}$$

costituito da g elementi, e dove ogni elemento del gruppo occorre solo una volta. In altre parole, il set $\mathcal{G}G$ è il gruppo stesso: $\mathcal{G}G \equiv \mathcal{G}$.
Dimostrazione: Moltiplica un elemento arbitrario $G_i \in \mathcal{G}$, per G^{-1} la cui esistenza è garantita dal momento che $\mathcal{G}$ ha struttura di gruppo. $G_iG^{-1} = G_k \in \mathcal{G}$ Ora: $G_iG^{-1}G = G_i(G^{-1}G) = G_i = G_kG$. Ne segue quindi che ogni elemento del gruppo è contenuto nel set $\mathcal{G}G$. Gli elementi del set $\mathcal{G}G$ sono tutti distinti dal momento che se per ipotesi $G_i = G_kG$ e $G_i = G_lG$ con $l \neq k$ possiamo scrivere $G_kG = G_lG$ e moltiplicando a destra per l' elemento inverso G^{-1} ambo i membri otteniamo $G_k = G_l$ contrariamente alla nostra ipotesi (*reductio ad absurdum*).

Il teorema del riarrangiamento è trivialmente valido anche per il set $G\mathcal{G}$. La consequenza di questo teorema è che in ogni riga e in ogni colonna della tabella di moltiplicazione di un gruppo ogni elemento del gruppo appare solo una volta. In termini equivalenti, ogni riga o colonna della tabella di moltiplicazione contiene diversi riarrangiamenti di tutti gli elementi del gruppo.

Una formulazione equivalente e generale del teorema del riarrangiamento è la seguente. Data una funzione arbitraria f che prende come argomento un'elemento del gruppo:

$$\sum_{i=1}^{g} f(GG_i) = \sum_{i=1}^{g} f(G_iG) = \sum_{i=1}^{g} f(G_i) \tag{15}$$

5 Isomorfismo tra gruppi e Omomorfismo

5.1 Isomorfismo

Dati due gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, con elementi G e G' rispettivamente, se esiste una applicazione biunivoca (biettiva, ovvero una one-to-one mapping) che associa ad ogni elemento $G \in \mathcal{G}$ un'unico elemento $G' \in \mathcal{G}'$, ovvero $f(G) = G'$, e tale che $G_iG_j = G_k \implies G'_iG'_j = G'_k$, allora i gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ sono detti *isomorfi*, $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$. A titolo di esempio, i gruppi C_{3v} e $\mathcal{S}_3$ sono isomorfi dal momento che esiste la seguente corrispondenza biettiva tra elementi dei due gruppi:

$$E \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv E \qquad C_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C_3^{-1} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I due gruppi hanno la stessa tabella di moltiplicazione. Matematicamente, gruppi isomorfi sono considerati identici poichè hanno la medesima struttura.

5.2 Omomorfismo

Dati due gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, con elementi G e G' rispettivamente, e una mappatura f che associa ad ogni elemento $G \in \mathcal{G}$ un' elemento $G' \in \mathcal{G}'$, ovvero $f(G) = G'$. Se la mappatura f è tale che

$$f(G_i G_j) = f(G_i) f(G_j) \tag{16}$$

$\forall G_i, G_j \in \mathcal{G}$, allora la mappatura f è detta *omomorfismo*. In tal caso si scrive $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}'$.

Esempio.

$C_{3v} \sim C_2 = \{C, C^2 = E\}$. Se infatti confrontiamo le rispettive tabelle di moltiplicazione, possiamo trovare un'omomorfismo, f, che soddisfa alla definizione data nell'equazione (16), e tale che:

$$\begin{aligned} f(E, C_3, C_3^{-1}) &= E \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= C \end{aligned}$$

ovvero la mappatura f associa a tre elementi del gruppo C_{3v} lo stesso elemento del gruppo C$_2$. Gli elementi $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$ sono mappati nello stesso elemento $E \in C_2$, mentre gli elementi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono mappati in $C \in C_2$. f è una corrispondenza 3:1 e scriviamo $C_{3v} \sim C_2$. È facile vedere che la f è un'omomorfismo tra C_{3v} e C_2 dal momento che, per esempio, $f(EC_3) = E = f(E)f(C_3)$, $f(E\sigma_1) = C = f(E)f(\sigma_1)$ ecc. Emerge quindi la sostanziale differenza tra omomorfismo e isomorfismo. Un'omomorfismo tra due set $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è una corrisponzenza n:1, con $n \geq 1$, mentre un'isomorfismo è una corrispondenza $1:1$ (applicazione iniettiva e suriettiva). In particolare, se la mappatura f è un'omomorfismo e la corrispondenza è 1:1, allora la mappatura tra i due set $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è un'isomorfismo, e $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Dalla relazione di omomorfismo tra i gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, seguono le seguenti osservazioni:

1. Se E è l'elemento identità di $\mathcal{G}$, $f(E)$ è l'elemento identità di $\mathcal{G}'$.

   Dal momento che E è l'elemento identità di $\mathcal{G}$:

$$\begin{cases} f(EG_i) = f(E)f(G_i) = f(G_i) & \forall G_i \in \mathcal{G} \\ f(G_iE) = f(G_i)f(E) = f(G_i) & \forall G_i \in \mathcal{G} \end{cases} \tag{17}$$

2. $f(G^{-1})$ è l'elemento inverso di $f(G)$

   $\forall G \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} f(GG^{-1}) &= f(G)f(G^{-1}) = f(E) \\ f(G^{-1}G) &= f(G^{-1})f(G) = f(E) \end{aligned} \tag{18}$$

6 Sottogruppi

Un sottogruppo $\mathcal{H}$ di un gruppo $\mathcal{G}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{G}$ che soddisfa gli assiomi di gruppo. Un qualsiasi gruppo $\mathcal{G}$ possiede due sottogruppi triviali, che sono il gruppo $\mathcal{G}$ e il sottogruppo formato dall'elemento identità, E. Tutti gli altri sottogruppi (se esistono) del gruppo $\mathcal{G}$ sono detti *sottogruppi propri* del gruppo $\mathcal{G}$.
Teorema: Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione del gruppo $\mathcal{G}$ se e solo se:

1. $\mathcal{H}$ è chiuso, ovvero $H_iH_j \in \mathcal{H}\ \forall H_i, H_j \in \mathcal{H}$
2. $\forall H_i \in \mathcal{H}\ \exists! H_i^{-1} \in \mathcal{H}$

Dimostrazione: Se $\mathcal{H}$ è un gruppo, le condizioni 1 e 2 sono automaticamente soddisfatte. Viceversa se le condizioni 1 e 2 sono soddisfatte, gli assiomi G1 e G4 della definizione di gruppo sono automaticamente soddisfatti. L'operazione di moltiplicazione è associativa dal momento che $\mathcal{G}$ è un gruppo. Inoltre, dalla condizione 1 segue che $E \in \mathcal{H}$ poichè $\forall H \in \mathcal{H}, HH^{-1} = H^{-1}H = E \in \mathcal{H}$.
Esempio. Il gruppo $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ha i seguenti sottogruppi propri: $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$, $\{E, \sigma_1\}$, $\{E, \sigma_2\}$, $\{E, \sigma_3\}$ come è evidente da un'esame della tabella di moltiplicazione.
Esempio. Il gruppo $C_{4v} = \{E, C_4, C_2, C_4^{-1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_d, \sigma'_d\}$ ha i seguenti sottogruppi propri: $\{E, C_2\}$, $\{E, C_4, C_2, C_4^{-1}\}$, $\{E, \sigma_x\}$, $\{E, \sigma_y\}$, $\{E, \sigma_d\}$ $\{E, \sigma'_d\}$, $\{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\}$,$\{E, C_2, \sigma_d, \sigma'_d\}$.

7 Classi laterali e decomposizione in classi laterali

Considera il gruppo C_{3v} ed un suo sottogruppo proprio $\mathcal{H}$, ad esempio $\mathcal{H} = \{E, \sigma_1\}$. Se moltiplichiamo il set $\mathcal{H}$ alla destra per σ_2 otteniamo: $\mathcal{H}\sigma_2 = \{\sigma_2, C_3\}$. Se invece moltiplichiamo il set $\mathcal{H}$ alla destra per σ_3 il set risultante è $\mathcal{H}\sigma_3 = \{\sigma_3, C_3^{-1}\}$. Da questo esempio si può notare che *i)* i tre sottoinsiemi di $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}, \mathcal{H}\sigma_2, \mathcal{H}\sigma_3$ non contengono elementi in comune e *ii)* tutti gli elementi del gruppo C_{3v} sono contenuti nei tre sottoinsiemi. I sottoinsiemi $\mathcal{H}, \mathcal{H}\sigma_2, \mathcal{H}\sigma_3$ sono chiamati *classi laterali destre* del gruppo C_{3v} e possiamo scrivere la seguente relazione (chiamata *decomposizione del gruppo in classi laterali destre*):

$$C_{3v} = \mathcal{H} + \mathcal{H}\sigma_2 + \mathcal{H}\sigma_3 \tag{19}$$

La decomposizione in classi laterali sinistre può essere fatta allo stesso modo. Supponiamo ad esempio di prendere lo stesso sottogruppo $\mathcal{H}$ e consideriamo le classi laterali sinistre $\sigma_2\mathcal{H}$ e $\sigma_3\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \sigma_2\mathcal{H} &= \{\sigma_2 E, \sigma_2\sigma_1\} = \{\sigma_2, C_3^{-1}\} \\ \sigma_3\mathcal{H} &= \{\sigma_3 E, \sigma_3\sigma_1\} = \{\sigma_3, C_3\} \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$C_{3v} = \mathcal{H} + \sigma_2\mathcal{H} + \sigma_3\mathcal{H}. \tag{20}$$

È possibile dare una procedura generale per ottenere la decomposizione di un qualsiasi gruppo finito in classi laterali destre o sinistre. Siano $\mathcal{G}$ un gruppo di ordine g, e $\mathcal{H}$ un suo sottogruppo proprio di ordine h. Prendiamo adesso un'elemento $G_2 \notin \mathcal{H}$ e costruiamo la *classe laterale destra* $\mathcal{H}G_2$. Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}G_2$ non esauriscono gli elementi del gruppo, prendiamo un'elemento $G_3 \notin \{\mathcal{H}, \mathcal{H}G_2\}$ e costruiamo la classe laterale destra $\mathcal{H}G_3$. Iteriamo la procedura fino a che tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{G}$ sono contenuti nell' unione delle varie classi laterali. $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}G_2 \cup \ldots \mathcal{H}G_l$. Se il gruppo $\mathcal{G}$ è un gruppo finito, la procedura richiede un numero finito di passi (nel nostro esempio il numero di iterazioni è $l-1$.) Possiamo quindi scrivere la seguente decomposizione del gruppo $\mathcal{G}$ in classi laterali:

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}G_1 + \mathcal{H}G_2 + \ldots + \mathcal{H}G_l \tag{21}$$

dove $G_1 \equiv E$ nell'Eq. (21). Gli elementi del set $\{G_i\}_{i=1,\ldots,l}$ sono chiamati elementi *rappresentativi* delle classi. Allo stesso modo, il gruppo $\mathcal{G}$ può essere decomposto in classi laterali sinistre:

$$\mathcal{G} = G'_1\mathcal{H} + G'_2\mathcal{H} + \ldots + G'_l\mathcal{H} \tag{22}$$

con $G'_1 \equiv E$.
Osservazione: Classi laterali differenti non contengono elementi in comune.
Dimostrazione: Supponiamo che due diverse classi laterali destre $\mathcal{H}G_i$ e $\mathcal{H}G_j$ contengano un'elemento in comune, G_k. Possiamo allora scrivere $H_1G_i = H_2G_j$ per gli elementi $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Ne segue quindi che $G_i = H_1^{-1}H_2G_j = H_3G_j$ dove $H_3 = H_1^{-1}H_2$, e l'elemento G_i appartiene alla classe laterale $\mathcal{H}G_j$ contrariamente alla procedura di costruzione delle classi laterali.

Dal momento che ogni classe laterale contiene h elementi distinti, dobbiamo avere $g = h \times l$ e quindi l'ordine g del gruppo $\mathcal{G}$ è divisibile per l'ordine h del gruppo $\mathcal{H}$. l è chiamato *indice* di $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}$. Quando g è un numero primo, i suoi divisori sono g e 1, da cui deduciamo che se l'ordine di un gruppo è un numero primo, il gruppo non possiede sottogruppi propri.

8 Classi di elementi coniugati

Definizione: Dato un gruppo $\mathcal{G}$ e due suoi elementi, $A, B \in \mathcal{G}$, B è detto *elemento coniugato* ad A, se esiste un elemento $G \in \mathcal{G}$ tale che:

$$B = GAG^{-1} \tag{23}$$

e l'elemento B è ottenuto da A attraverso la trasformazione effettuata da G.
Possiamo dedurre le seguenti proprietà della relazione di coniugazione:

1. Ogni elemento è coniugato a se stesso (proprietà riflessiva)

Table 7: Determinazione delle classi del gruppo C_{4v}.

A	$G_1 = E$	$G_2 = C_4$	$G_3 = C_2$	$G_4 = C_4^{-1}$	$G_5 = \sigma_x$	$G_6 = \sigma_y$	$G_7 = \sigma_d$	$G_8 = \sigma'_d$
E	E	E	E	E	E	E	E	E
C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2	C_2
C_4	C_4	C_4	C_4	C_4	C_4^{-1}	C_4^{-1}	C_4^{-1}	C_4^{-1}
σ_x	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_y	σ_y
σ_d	σ_d	σ'_d	σ_d	σ'_d	σ'_d	σ'_d	σ_d	σ_d

Table 8: Classi del gruppo C_{4v}.

Classe	Elementi nella classe	Numero di elementi, h_k
$\mathcal{C}_1$	E	1
$\mathcal{C}_2$	C_2	1
$\mathcal{C}_3$	C_4,C_4^{-1}	2
$\mathcal{C}_4$	σ_x,σ_y	2
$\mathcal{C}_5$	σ_d,σ'_d	2

2. Se B è coniugato ad A, allora A è coniugato a B (proprietà simmetrica). Infatti se $B = GAG^{-1}$, $A = G^{-1}B(G^{-1})^{-1}$

3. Se B è coniugato ad A, e C è coniugato a B, allora C è coniugato ad A (proprietà transitiva) Infatti $C = G'B(G')^{-1} = G'(GAG^{-1})(G')^{-1} = (G'G)A(G'G)^{-1}$

La relazione di coniugazione è una *relazione di equivalenza.*

Dato un qualsiasi elemento del gruppo, $A \in \mathcal{G}$, il set di tutti gli elementi coniugati ad A è detto *classe*. Per definizione, classi differenti non hanno elementi in comune. Possiamo determinare in maniera automatica tutti gli elementi che appartengono ad una data classe. Prendiamo un'elemento rappresentativo A e formiamo tutti i prodotti $A, G_2AG_2^{-1}, \ldots, G_gAG_g^{-1}$. Tutti questi elementi (non necessariamente distinti) appartengono alla stessa classe per definizione. Usando questa procedura, possiamo raggruppare tutti gli elementi del gruppo C_{4v} in classi. La procedura è illustrata in Tabella 7, mentre le classi del gruppo C_{4v} sono riportate in Tabella 8.

Con questa procedura è possibile, dato un qualsiasi gruppo finito $\mathcal{G}$ e la sua tabella di moltiplicazione, suddividere tutti i suoi elementi in classi. La procedurà però è lunga, e non dà nessuna motivazione di tipo geometrico sulla particolare suddivisione degli elementi del gruppo in classi.

Le seguenti considerazioni intuitive giustificano la struttura a classi del gruppo C_{4v}, e possono essere usate nella classificazione delle classi di qualsiasi gruppo. In figura 5 vediamo l'effetto su un punto generico del piano,

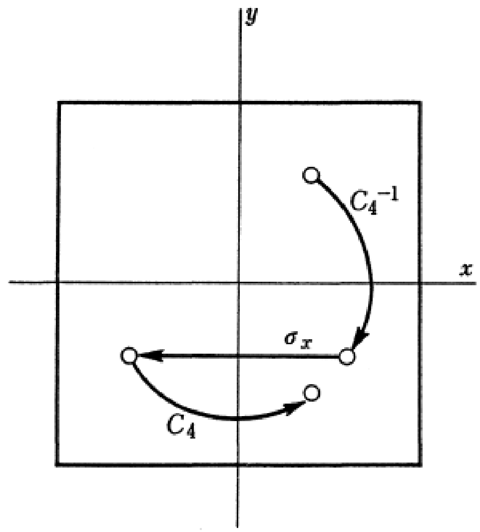

Figure 5: Effetto su un punto generico del piano, dell'operazione $C_4\sigma_x C_4^{-1}$.

dell'operazione $C_4\sigma_x C_4^{-1}$ e notiamo che l'effetto sul punto è lo stesso dell'operazione σ_y applicata al punto. Quindi $C_4\sigma_x C_4^{-1} = \sigma_y$. Gli elementi σ_x e σ_y sono coniugati dal momento che sono relazionati dalla rotazione C_4, che porta il piano di simmetria σ_x nel piano σ_y. Lo stesso si può dire per i piani diedri, ma in C_{4v} non esiste nessuna operazione che porti σ_x in σ_d e quindi queste ultime operazioni non sono coniugate in C_{4v}. Da un punto di vista geometrico, elementi coniugati sono operazioni geometricamente equivalenti.

Notiamo inoltre che se $A = E \Longrightarrow G_i E G_i^{-1} = E$, $\forall G_i \in \mathcal{G}$, ovvero l'elemento E costituisce una classe con se stesso, $E \equiv \mathcal{C}_1$. Inoltre se il gruppo è commutativo (abeliano), ogni elemento forma una classe a se stante, visto che $G_i A G_i^{-1} = G_i G_i^{-1} A = EA = A$, ed il numero delle classi del gruppo è uguale all'ordine del gruppo.

9 Moltiplicazione di classi

Sia $\mathcal{C}_k$ una classe del gruppo $\mathcal{G}$ con h_k elementi distinti. Se trasformiamo gli elementi della classe con un arbitrario elemento $G \in \mathcal{G}$, il set $G\mathcal{C}_k G^{-1}$ coincide con la classe $\mathcal{C}_k$:

$$G\mathcal{C}_k G^{-1} = \mathcal{C}_k \tag{24}$$

Table 9: Tabella di moltiplicazione delle classi del gruppo C_{3v}.

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2$	$2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$	$2\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_3$	$2\mathcal{C}_3$	$3\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{C}_2$

Infatti il set $\mathcal{C}_k G^{-1}$ ha h_k elementi distinti ($G_i G^{-1} = G_j G^{-1} \Longrightarrow G_i = G_j$) cosi' come il set $G\mathcal{C}_k G^{-1}$. Dal momento che gli h_k elementi distinti del set $G\mathcal{C}_k G^{-1}$ sono elementi coniugati per costruzione, $G\mathcal{C}_k G^{-1} = \mathcal{C}_k$.

Se adesso formiamo il set

$$\mathcal{C} = \sum_k a_k \mathcal{C}_k \tag{25}$$

con interi non negativi a_k, allora per ogni elemento del gruppo $G \in \mathcal{G}$ vale

$$G\mathcal{C}G^{-1} = \mathcal{C} \tag{26}$$

La proposizione inversa è anche vera: se un set $\mathcal{C}$ soddisfa l'equazione (26), il set $\mathcal{C}$ deve essere formato da classi complete.

Definizione: Date due classi $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$, il set prodotto $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ è l'insieme degli elementi ottenuti facendo tutti i prodotti degli elementi di $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$. Da notare che nel prodotto di $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$ un dato elemento può comparire diverse volte; in tal caso deve essere contato indipendentemente ogni volta che appare.

Esempio. Considera il gruppo C_{3v} che ha le seguenti tre classi: $\mathcal{C}_1 = \{E\}$, $\mathcal{C}_2 = \{C_3, C_3^{-1}\}$, $\mathcal{C}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Possiamo costruire i prodotti tra le classi usando la tabella di moltiplicazione del gruppo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 &= E(C_3 + C_3^{-1}) = C_3 + C_3^{-1} = \mathcal{C}_2 \\
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3 &= E(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \mathcal{C}_3 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2 &= (C_3 + C_3^{-1})(C_3 + C_3^{-1}) = 2E + C_3 + C_3^{-1} = 2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \\
\mathcal{C}_3\mathcal{C}_3 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 3E + 3C_3 + 3C_3^{-1} = 3\mathcal{C}_1 + 3\mathcal{C}_2 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3 &= (C_3 + C_3^{-1})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2\mathcal{C}_3 \\
... &= ...
\end{aligned}$$

Così facendo, si ottiene la tabella di moltiplicazione delle classi per il gruppo C_{3v}, che è riportata nella tabella 9.

Con una simile procedura si ottiene la tabella di moltiplicazione delle classi del gruppo C_{4v}. Infatti è semplice verificare che valgono le seguenti relazioni:

Table 10: Tabella di moltiplicazione delle classi del gruppo C_{4v}.

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_3$	$2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{C}_2$	$2\mathcal{C}_5$	$2\mathcal{C}_4$
$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_4$	$2\mathcal{C}_5$	$2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{C}_2$	$2\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_5$	$2\mathcal{C}_4$	$2\mathcal{C}_3$	$2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{C}_2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 &= \mathcal{C}_2\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \\
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3 &= \mathcal{C}_3\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_3 \\
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_4 &= \mathcal{C}_4\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_4 \\
\mathcal{C}_1\mathcal{C}_5 &= \mathcal{C}_5\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_5 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2 &= \mathcal{C}_1 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3 &= \mathcal{C}_3\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_4 &= \mathcal{C}_4\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_4 \\
\mathcal{C}_2\mathcal{C}_5 &= \mathcal{C}_5\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_5 \\
\mathcal{C}_3\mathcal{C}_4 &= \mathcal{C}_4\mathcal{C}_3 = 2\mathcal{C}_5 \\
\mathcal{C}_3\mathcal{C}_5 &= \mathcal{C}_5\mathcal{C}_3 = 2\mathcal{C}_4 \\
\mathcal{C}_4\mathcal{C}_5 &= \mathcal{C}_5\mathcal{C}_4 = 2\mathcal{C}_3 \\
\mathcal{C}_5\mathcal{C}_5 &= 2\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{C}_2
\end{aligned}
$$

Nota che in questi esempi, l'operazione di moltiplicazione di classi gode della proprietà commutativa. In realtà questa è una proprietà generale dell'operazione di moltiplicazione di classi. Infatti, per una qualsiasi classe $\mathcal{C}_i$ e dato un elemento arbitrario $G \in \mathcal{C}_j$ possiamo scrivere

$$G\mathcal{C}_i G^{-1} = \mathcal{C}_i \tag{27}$$

ovvero:

$$G\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i G \tag{28}$$

Se questa relazione viene sommata su tutti gli elementi $G \in \mathcal{C}_j$ otteniamo la relazione:

$$\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_j\mathcal{C}_i \tag{29}$$

Come esemplificato dai gruppi C_{3v} e C_{4v}, il prodotto $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ di due classi consiste di classi, e può essere scritto in tutta generalità come:

$$\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j = \sum_k c_{ij}^k \mathcal{C}_k \tag{30}$$

in termini di interi non negativi, c_{ij}^k, chiamati *costanti di classe*. La notazione dell'equazione (30) significa che nel prodotto $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ la classe $\mathcal{C}_k$ compare c_{ij}^k volte.

L'equazione (30) può essere giustificata considerando che il prodotto $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ deve essere composto di intere classi, in quanto:

$$G\mathcal{C}_i\mathcal{C}_jG^{-1} = G\mathcal{C}_iG^{-1}G\mathcal{C}_jG^{-1} = \mathcal{C}_i\mathcal{C}_j \tag{31}$$

Osservazione. Data una classe $\mathcal{C}_j$ costituita da h_j elementi, i loro elementi inversi costituiscono una classe, $\mathcal{C}_{j'}$. Si può dimostrare che

$$c_{ij}^1 = \begin{cases} h_i \text{ quando } \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{j'} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{32}$$

Dimostrazione: Supponiamo che due qualsiasi elementi, A e B, appartengano alla stessa classe $\mathcal{C}_j$. Ne deriva che $B = GAG^{-1}$ per un'elemento $G \in \mathcal{G}$. Prendendo le inverse otteniamo $B^{-1} = GA^{-1}G^{-1}$ e quindi A^{-1} e B^{-1} sono anch'essi coniugati ed appartengono alla stessa classe, $\mathcal{C}_{j'}$. Ora, se $\mathcal{C}_i$ non coincide con la classe $\mathcal{C}_{j'}$, il prodotto delle classi $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ non contiene l'identità e $c_{ij}^1 = 0$. Se invece $\mathcal{C}_i$ coincide con $\mathcal{C}_{j'}$ il prodotto $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_j$ contiene l'identità h_i volte e quindi $c_{ij}^1 = h_i$.

10 Sottogruppi invarianti

Se $\mathcal{H}$ è un sottogruppo di $\mathcal{G}$, il set di elementi $G\mathcal{H}G^{-1}$ per un'arbitrario elemento $G \in \mathcal{G}$, forma un sottogruppo. È facile dimostrare che questo è vero. Infatti:

1. Il set $G\mathcal{H}G^{-1}$ è chiuso sotto l'operazione di moltiplicazione dal momento che dati due qualsiasi elementi di esso, GH_iG^{-1} e GH_jG^{-1} abbiamo

$$(GH_iG^{-1})(GH_jG^{-1}) = G(H_iH_j)G^{-1} = GH_kG^{-1} \in G\mathcal{H}G^{-1} \tag{33}$$

2. L'inversa dell'elemento GH_iG^{-1} è $GH_i^{-1}G^{-1} \in G\mathcal{H}G^{-1}$.

Il sottogruppo $G\mathcal{H}G^{-1}$ è chiamato *sottogruppo coniugato di* $\mathcal{H}$. Esso è inoltre chiaramente isomorfo a $\mathcal{H}$. In generale un sottogruppo non deve necessariamente contenere classi complete, come è chiaro dagli esempi mostrati prima. Se però il sottogruppo $\mathcal{H}$ contiene intere classi di elementi, allora dato un qualsiasi elemento $G_i \in \mathcal{G}$ vale la relazione:

$$G_i\mathcal{H}G_i^{-1} = \mathcal{H} \tag{34}$$

e il sottogruppo $\mathcal{H}$ è un *sottogruppo invariante di* $\mathcal{G}$. $\mathcal{H}$ è anche chiamato *sottogruppo normale* o *divisore normale*, e deve necessariamente contenere tutti gli elementi in classi. Sottogruppi invarianti devono consistere di classi.
Esempi:

1. **gruppo** C_{3v}

   Abbiamo visto che i sottogruppi propri del gruppo C_{3v} sono $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$, $\{E\sigma_1\}$, $\{E, \sigma_2\}$, $\{E, \sigma_3\}$. Le sue classi sono invece $\mathcal{C}_1 = \{E\}$, $\mathcal{C}_2 = \{C_3, C_3^{-1}\}$, $\mathcal{C}_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Solamente il sottogruppo $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$, che consiste delle classi $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ è un sottogruppo invariante di C_{3v}. Nota che l'equazione (34) implica la seguente relazione tra classi laterali destre e sinistre:

   $$G_i\mathcal{H} = \mathcal{H}G_i \tag{35}$$

   ovvero nel caso di un sottogruppo invariante, le classi laterali destre e sinistre coincidono.

2. **Gruppo** C_{4v}

   I sottogruppi propri del gruppo C_{4v} sono $\{E, C_2\}$, $\{E, C_4, C_2, C_4^{-1}\}$, $\{E\sigma_x\}$, $\{E, \sigma_y\}$, $\{E, \sigma_d\}$ $\{E, \sigma'_d\}$, $\{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\}$,$\{E, C_2, \sigma_d, \sigma'_d\}$. Il gruppo ha 5 classi di elementi coniugati: $\mathcal{C}_1 = \{E\}$,$\mathcal{C}_2 = \{C_2\}$, $\mathcal{C}_3 = \{C_4, C_4^{-1}\}$, $\mathcal{C}_4 = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ $\mathcal{C}_5 = \{\sigma_d, \sigma'_d\}$. Il gruppo possiede 4 sottogruppi invarianti, $\mathcal{H}_1 = \{E, C_2\} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$; $\mathcal{H}_2 = \{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_4$; $\mathcal{H}_3 = \{E, C_4, C_2, C_4^{-1}\} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$; $\mathcal{H}_4 = \{E, C_2, \sigma_d, \sigma'_d\} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_5$.

10.1 Gruppo fattore

Consideriamo adesso la decomposizione in classi laterali di un gruppo $\mathcal{G}$ di ordine g rispetto a un suo sottogruppo invariante $\mathcal{N}$ di ordine n.

$$\mathcal{G} = \mathcal{N}G_1 + \mathcal{N}G_2 + \ldots + \mathcal{N}G_l \tag{36}$$

con $G_1 \equiv E$. Il prodotto di due elementi che appartengono rispettivamente alle classi $\mathcal{N}G_i$ e $\mathcal{N}G_j$ è dato da:

$$(N_pG_i)(N_qG_j) = N_pG_iN_qG_i^{-1}G_iG_j = N_rG_iG_j \tag{37}$$

dove $N_r = N_pG_iN_qG_i^{-1}$ dal momento che $G_iN_qG_i^{-1} \in \mathcal{N}$. L'elemento $N_rG_iG_j$ appartiene alla classe laterale $\mathcal{N}G_iG_j$, ovvero il prodotto di due classi laterali è una classe laterale. Possiamo quindi scrivere:

$$(\mathcal{N}G_i)(\mathcal{N}G_j) = \mathcal{N}G_iG_j \tag{38}$$

Le classi laterali formano un gruppo sotto l'operazione di moltiplicazione definita in questa via. Il gruppo è chiamato *Gruppo Fattore* e gli elementi di questo gruppo sono classi laterali. Il gruppo fattore di un gruppo $\mathcal{G}$ rispetto al suo sottogruppo invariante $\mathcal{N}$ è denotato come $\mathcal{G}/\mathcal{N}$. L'ordine del gruppo fattore è chiaramente dato da $l = \frac{g}{n}$, ovvero l'indice di $\mathcal{N}$ in $\mathcal{G}$.
Esercizio: Mostra che le classi laterali soddisfano gli assiomi di gruppo con la regola di moltiplicazione data dall'equazione (38).

1. Il gruppo fattore è chiaramente chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione delle classi laterali, dal momento che il prodotto di due classi laterali è una classe laterale

2. La moltiplicazione è associativa:

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}G_i\mathcal{N}G_j)\mathcal{N}G_k &= \mathcal{N}(G_iG_j)G_k \\ \mathcal{N}G_i(\mathcal{N}G_j\mathcal{N}G_k) &= \mathcal{N}G_i(G_jG_k)\end{aligned}$$

3. L'elemento neutro o unitario, è il sottogruppo invariante $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}G_1\mathcal{N}G_i &= \mathcal{N}(G_1G_i) \\ \mathcal{N}G_i\mathcal{N}G_1 &= \mathcal{N}(G_iG_1)\end{aligned}$$

   dove $G_1 = E$.

4. L'elemento inverso della classe laterale $\mathcal{N}G_i$ è la classe laterale $\mathcal{N}G_i^{-1}$.

Esempi:

1. **Il gruppo fattore** C_{3v}/C_3.

   C_3 è l'unico sottogruppo invariante di C_{3v} La classe laterale $C_3\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e la decomposizione del gruppo C_{3v} in classi laterali rispetto al sottogruppo invariante C_3 può essere scritta come:

$$C_{3v} = C_3E + C_3\sigma_1 \tag{39}$$

   da cui segue che $n = 3$, $l = 2$ e l'ordine del gruppo fattore C_{3v}/C_3 è due. Dalla tabella di moltiplicazione del gruppo C_{3v} è possibile ricavare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}C_3C_3 &= C_3 \\ C_3(C_3\sigma_1) &= C_3\sigma_1 \\ (C_3\sigma_1)C_3 &= C_3\sigma_1 \\ (C_3\sigma_1)(C_3\sigma_1) &= C_3(\sigma_1\sigma_1) = C_3\end{aligned}$$

   e si ottiene la seguente tabella di moltiplicazione del gruppo fattore C_{3v}/C_3:

   Nota che esiste un'isomorfismo tra il gruppo fattore C_{3v}/C_3 e C_2, il gruppo ciclico di ordine 2.

Table 11: Tabella di moltiplicazione del gruppo fattore C_{3v}/C_3.

	C_3	$C_3\sigma_1$
C_3	C_3	$C_3\sigma_1$
$C_3\sigma_1$	$C_3\sigma_1$	C_3

2. **Gruppo fattore** C_{4v}/C_2

   Troviamo dapprima la decomposizione in classi laterali del gruppo C_{4v} rispetto al sottogruppo invariante $C_2 = \{E, C_2\}$ e poi deriveremo la tabella di moltiplicazione del gruppo fattore.

   Date le relazioni:

$$\begin{aligned} C_2C_4 &= \{C_4, C_4^{-1}\} \\ C_2\sigma_x &= \{\sigma_x, \sigma_y\} \\ C_2\sigma_d &= \{\sigma_d, \sigma_d'\} \end{aligned}$$

   otteniamo la seguente decomposizione in classi laterali:

$$C_{4v} = C_2E + C_2C_4 + C_2\sigma_x + C_2\sigma_d. \tag{40}$$

   Si ottiene la seguente tabella di moltiplicazione del gruppo fattore C_{4v}/C_2:

Table 12: Tabella di moltiplicazione del gruppo fattore C_{4v}/C_2.

	C_2	C_2C_4	$C_2\sigma_x$	$C_2\sigma_d$
C_2	C_2	C_2C_4	$C_2\sigma_x$	$C_2\sigma_d$
C_2C_4	C_2C_4	C_2	$C_2\sigma_d$	$C_2\sigma_x$
$C_2\sigma_x$	$C_2\sigma_x$	$C_2\sigma_d$	C_2	C_2C_4
$C_2\sigma_d$	$C_2\sigma_d$	$C_2\sigma_x$	C_2C_4	C_2

Data la relazione $(\mathcal{N}G_i)(\mathcal{N}G_j) = \mathcal{N}G_iG_j$ e una mappatura $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{N}$ e tale che $f(G_i) \to \mathcal{N}G_i$, allora f è un'omomorfismo poichè trivialmente $f(G_i)f(G_j) = f(G_iG_j)$. Ne segue quindi che $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}/\mathcal{N}$, In altre parole, quando $\mathcal{N}$ è un sottogruppo invariante, la corrispondenza tra elementi di un gruppo e le sue classi laterali rispetto al sottogruppo $\mathcal{N}$ è un omomorfismo.

10.2 Il Nucleo (kernel)

Sia f un'omomorfismo tra un gruppo $\mathcal{G}$ ed un gruppo $\mathcal{G}'$, tale che

$$f(G_1G_2) = f(G_1)f(G_2)$$

$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}$. Il set di tutti gli elementi di $\mathcal{G}$ che sono mappati sull' elemento identità $E' \in \mathcal{G}'$ costituiscono un sottogruppo invariante di $\mathcal{G}$, e rappresentano il *kernel* (o nucleo) dell'applicazione f:

$$\mathcal{K} = \{G | G \in \mathcal{G}, f(G) = E'\} \tag{41}$$

Dimostrazione: Dimostriamo dapprima che $\mathcal{K}$ è un sottogruppo.

Dati $G_1, G_2 \in \mathcal{K}$, $G_1G_2 \in \mathcal{K}$. Infatti, dal momento che f è un omomorfismo:

$$f(G_1G_2) = f(G_1)f(G_2) = E'E' = E'. \tag{42}$$

Inoltre, $f(G^{-1}) = f(G)^{-1} = E^{-1} = E$, e ne consegue che se un qualsiasi elemento $G \in \mathcal{G}$ appartiene al Kernel, cosi' anche $G^{-1} \in \mathcal{K}$. Per dimostrare che $\mathcal{K}$ è un sottogruppo invariante, è sufficiente dimostrare che dato un qualsiasi elemento $G \in \mathcal{G}$, la condizione

$$G\mathcal{K}G^{-1} = \mathcal{K} \tag{43}$$

è valida. Considera un qualsiasi elemento $K_i \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} f(GK_iG^{-1}) &= f(G)f(K_i)f(G^{-1}) = f(G)E'f(G^{-1}) \\ &= f(G)f(G^{-1}) = f(GG^{-1}) = f(E) = E'. \end{aligned} \tag{44}$$

da cui deriva che il prodotto $GK_iG^{-1} \in \mathcal{K}$ e quindi $\mathcal{K}$ è sottogruppo invariante.

10.3 Teorema dell'omomorfismo

Teorema: Sia $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ un' omomorfismo tra i gruppi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$, e denotiamo il kernel di f con $\mathcal{K}$. La mappatura $\bar{f}$

$$\bar{f} : \mathcal{G}/\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G}' \tag{45}$$

con legge:

$$\bar{f}(\mathcal{K}G_i) = f(G_i) \tag{46}$$

è un isomorfismo, e il gruppo fattore $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ è isomorfo al gruppo $\mathcal{G}'$:

$$\mathcal{G}/\mathcal{K} \cong \mathcal{G}'. \tag{47}$$

Dimostriamo dapprima che la mappatura $\bar{f}$ è un'omomorfismo. Usando la definizione del prodotto di due elementi del gruppo fattore ed il fatto che f è un'omomorfismo tra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\mathcal{K}G_i)\bar{f}(\mathcal{K}G_j) &= f(G_i)f(G_j) = f(G_iG_j) \\ &= \bar{f}(\mathcal{K}G_iG_j) = \bar{f}(\mathcal{K}G_i\mathcal{K}G_j)\end{aligned} \tag{48}$$

Per provare che $\bar{f}$ è un'isomorfismo, dobbiamo dimostrare che $\bar{f}$ trasforma due diverse classi $\mathcal{K}G_i$ e $\mathcal{K}G_j$, con $G_i \neq G_j$ a elementi differenti $f(G_i) \neq f(G_j) \in \mathcal{G}'$. Supponiamo per assurdo che $f(G_i) = f(G_j)$. Allora avremo che:

$$f(G_iG_j^{-1}) = f(G_i)f(G_j^{-1}) = f(G_i)f(G_j)^{-1} = E' \tag{49}$$

e quindi $G_iG_j^{-1} \in \mathcal{K}$ ovvero G_i e G_j appartengono alla stessa classe laterale, contrariamente alla nostra ipotesi che $\mathcal{K}G_i$ e $\mathcal{K}G_j$ siano classi differenti.

11 Il gruppo prodotto diretto

Supponiamo di avere due gruppi, $\mathcal{A} = \{A_1 \equiv E_{\mathcal{A}}, A_2, \ldots, A_g\}$ di ordine g, e $\mathcal{B} = \{B_1 \equiv E_{\mathcal{B}}, B_2, \ldots, B_l\}$ di ordine l, e supponiamo che gli elementi del gruppo $\mathcal{A}$ commutino con gli elementi del gruppo $\mathcal{B}$, ovvero:

$$A_iB_j = B_jA_i \tag{50}$$

allora si può provare che il set di gl elementi A_iB_j formano un gruppo, detto *gruppo prodotto diretto* dei gruppi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Il gruppo prodotto diretto viene indicato con $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

La moltiplicazione di due elementi del gruppo $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è definita come:

$$(A_iB_j)(A_{i'}B_{j'}) = (A_iA_{i'})(B_jB_{j'}) = A_{i''}B_{j''} \tag{51}$$

ed è chiaro che il set di gl elementi è chiuso rispetto alla moltiplicazione. L'elemento identità è $E_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}$. L'elemento inverso dell'elemento A_iB_j è $A_i^{-1}B_j^{-1}$, e l'operazione è associativa.

Esempio.

Consideriamo ancora la simmetria di un triangolo equilatero (gruppo C_{3v}). Se non distinguiamo tra le due facce del triangolo, esiste un'addizionale elemento di simmetria, ovvero il piano di simmetria coincidente con il piano del triangolo. Questo tipo di piano viene chiamato *piano di simmetria orizzontale*, σ_h, per distinguerlo dai piani di simmetria che contengono l'asse di rotazione principale, e che vengono appunto chiamati piani verticali. Il gruppo ciclico di ordine 2 composto dagli elementi $\{\sigma_h, \sigma_h^2 \equiv E\}$, e denotato C_{1h}, è tale che i suoi elementi commutano con gli elementi del gruppo C_{3v}, ed è pertanto possibile costruire il gruppo prodotto diretto:

$$C_{3v} \times C_{1h} = \begin{cases} E, C_3, C_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \\ \sigma_h, C_3\sigma_h, C_3^{-1}\sigma_h, \sigma_1\sigma_h, \sigma_2\sigma_h, \sigma_3\sigma_h \end{cases} \tag{52}$$

ed il gruppo risultante è chiamato D_{3h}. Nota che il prodotto $\sigma_i \sigma_h = U_i$, $i = 1, 2, 3$ è una rotazione attorno all'asse che rappresenta l'intersezione dei due piani, di un'angolo di π. In termini di queste rotazioni, possiamo scrivere (nota che $\sigma_i = U_i \sigma_h$ dal momento che $\sigma_h \sigma_h = E$):

$$C_{3v} \times C_{1h} = \begin{cases} E, C_3, C_3^{-1}, U_1\sigma_h, U_2\sigma_h, U_3\sigma_h \\ \sigma_h, C_3\sigma_h, C_3^{-1}\sigma_h, U_1, U_2, U_3 \end{cases} \tag{53}$$

e quindi il gruppo prodotto diretto $C_{3v} \times C_{1h}$, può anche essere espresso come prodotto diretto del gruppo $D_3 = \{E, C_3, C_3^{-1}, U_1, U_2, U_3\}$ e del gruppo C_{1h}:

$$D_{3h} = D_3 \times C_{1h} \tag{54}$$