Spazi vettoriali

Daniele Toffoli

June 5, 2017

1 Vettori e spazi vettoriali

Un vettore $\boldsymbol{u}$ è caratterizzato da una data direzione e verso, e dalla sua lunghezza (modulo), indicata con $|\boldsymbol{u}|$. Il modulo è un numero reale positivo (o nullo). Esiste una distinzione tra grandezze fisiche vettoriali (caratterizzate cioè da un numero e da una direzione, come la velocità o l'accelerazione) e grandezze fisiche scalari (numeri reali positivi), come la temperatura T, la pressione p etc. I vettori hanno le seguenti proprietà:

1. Dati due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ (somma di due vettori) è un vettore.
2. Dato un numero reale c, ed un vettore $\boldsymbol{u}$, $c\boldsymbol{u}$ è un vettore di modulo $|c||\boldsymbol{u}|$ ($|c|$ è il valore assoluto di c), stessa direzione e stesso verso se $c > 0$ o verso opposto se $c < 0$.

Il set di vettori $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ costituisce uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ sul campo dei numeri reali. Lo spazio vettoriale è lineare dal momento che se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{V}$, $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{V}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Il concetto di spazio vettoriale può essere generalizzato a un qualsiasi insieme astratto di elementi, $\mathcal{V}$, nel quale sono definite operazioni tra gli elementi e operazioni tra elementi di $\mathcal{V}$ e un campo di scalari. Di seguito viene data la definizione matematica di uno spazio vettoriale.

1.1 Definizione di spazio vettoriale

Considera un set $\mathcal{V}$ di elementi $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \cdots$, chiamati *vettori.* L'insieme $\mathcal{V}$ è detto costituire uno *spazio vettoriale*, se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

- V1: possiamo definire un'operazione (o legge di composizione) "+" tale che $\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j \in \mathcal{V}$ $\forall \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \in \mathcal{V}$ (proprietà di chiusura)
- V2: L'operazione gode della proprietà associativa: $(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j) + \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}_i + (\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_k)$, $\forall \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k \in \mathcal{V}$
- V3: Esiste un unico elemento neutro, $0_{\mathcal{V}}$, tale che, $\boldsymbol{u}_i + 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}} + \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i$,$\forall \boldsymbol{u}_i \in \mathcal{V}$

V4: $\forall \boldsymbol{u}_i \in \mathcal{V}$ esiste un unico elemento inverso, $-\boldsymbol{u}_i$, tale che $\boldsymbol{u}_i + (-\boldsymbol{u}_i) = -\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i = 0_{\mathcal{V}}$

V5: L'operazione "+" gode della proprietà commutativa: $\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{u}_i$, $\forall \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \in \mathcal{V}$

Dato poi un campo di scalari, K, ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ nelle nostre applicazioni), possiamo definire un'operazione tra vettori e scalari, tale che gode delle seguenti proprietà

V6: $c\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, $\forall c \in K$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$.

V7: il prodotto è associativo: $(c_1 c_2)\boldsymbol{u} = c_1(c_2\boldsymbol{u})$, $\forall c_1, c_2 \in K$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$.

V8: $c(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j) = c\boldsymbol{u}_i + c\boldsymbol{u}_j$, $\forall \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \in \mathcal{V}$, $\forall c \in K$

V9: il prodotto è distributivo rispetto alla somma: $(c_1+c_2)\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}+c_2\boldsymbol{u}, \forall c_1, c_2 \in K$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$

V10: $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, dove 1 è l'elemento neutro dell'operazione "prodotto" in K, e che conferisce a K la struttura di campo.

1.2 Proprietà degli spazi vettoriali

Usando gli assiomi sopra riportati, è possibile dimostrare le seguenti proprietà degli spazi vettoriali:

1. $0_K\boldsymbol{v} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

   Infatti è possibile scrivere:

   $$0_K\boldsymbol{v} = (0_K + 0_K)\boldsymbol{v} = 0_K\boldsymbol{v} + 0_K\boldsymbol{v}.$$

   Dal momento che $\mathcal{V}$ è gruppo abeliano esiste l'elemento inverso di $0_K\boldsymbol{v}$, che chiamiamo $-(0_K\boldsymbol{v})$. Aggiungendo ad entrambi i membri dell'equazione sopra $-(0_K\boldsymbol{v})$ si ottiene la proprietà enunciata.

2. $k0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall k \in K$.

   Infatti, procedendo come al punto 1., possiamo scrivere:

   $$k0_{\mathcal{V}} = k(0_{\mathcal{V}} + 0_{\mathcal{V}}) = k0_{\mathcal{V}} + k0_{\mathcal{V}}.$$

   e quindi:

   $$k0_{\mathcal{V}} - (k0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{V}} = k0_{\mathcal{V}}.$$

3. $k\boldsymbol{v} = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow k = 0_K$ oppure $\boldsymbol{v} = 0_{\mathcal{V}}$.

   Infatti, se $k = 0_K$, per il punto 1 abbiamo $0_K\boldsymbol{v} = 0_{\mathcal{V}}$. Se $k \neq 0$, allora, dal momento che K è un campo, $\forall k \neq 0$, $\exists!\ k^{-1}$ tale che $kk^{-1} = k^{-1}k = 1_K$, l'elemento identità della moltiplicazione in K:

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{v} &= 0_{\mathcal{V}} \\ (k^{-1}k)\boldsymbol{v} &= k^{-1}0_{\mathcal{V}} \\ \boldsymbol{v} &= k^{-1}0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

   per il punto 2.

4. $-(k\boldsymbol{v}) = (-k)\boldsymbol{v} = k(-\boldsymbol{v})$, $\forall k \in K$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

   Dalla relazione

$$k\boldsymbol{v} + (-k)\boldsymbol{v} = (k-k)\boldsymbol{v} = 0_K\boldsymbol{v} = 0_{\mathcal{V}}$$

   sommiamo ad ambo i membri $-(k\boldsymbol{v})$ e otteniamo

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{v} - (k\boldsymbol{v}) + (-k)\boldsymbol{v} &= 0_{\mathcal{V}} - (k\boldsymbol{v}) \\ (-k)\boldsymbol{v} &= -(k\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

   e $(-k)\boldsymbol{v} = k(-\boldsymbol{v})$ dal momento che $\mathcal{V}$ è spazio vettoriale.

5. $k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v}$

   Per la proprietà 4. possiamo scrivere:

$$k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k(-\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} - k\boldsymbol{v}$$

1.3 Definizione di base di uno spazio vettoriale

Dati n vettori $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_n \equiv \{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, e una loro generica *combinazione lineare* $c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ (che è a sua volta un vettore dello spazio vettoriale), i vettori $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sono detti *linearmente indipendenti* se

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = 0_{\mathcal{V}} \iff c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 \tag{1}$$

Nota che nell'equazione (1), $0_{\mathcal{V}}$ denota il vettore nullo, mentre il simbolo 0 denota l'elemento neutro rispetto alla somma in K. Nel proseguio, ometteremo il pedice $\mathcal{V}$ e il significato del simbolo sarà chiaro dal contesto. Se esiste una soluzione all'equazione (1), con i coefficienti c_i non tutti nulli, i vettori $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ non sono linearmente indipendenti, e sono detti *linearmente dipendenti*.

Se in uno spazio vettoriale possiamo trovare al massimo n vettori linearmente indipendenti, allora lo spazio vettoriale ha dimensione finita, e n è detta *dimensione* dello spazio vettoriale. Considera adesso uno spazio vettoriale n-dimensionale, $\mathcal{V}^n$, un vettore arbitrario $\boldsymbol{u}$ e una generica combinazione lineare con n vettori linearmente indipendenti, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\dots,n}$,

$$c\boldsymbol{u} + c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \tag{2}$$

Dal momento che in uno spazio vettoriale di dimensione n possiamo trovare al massimo n vettori linearmente indipendenti, possiamo scrivere:

$$c\boldsymbol{u} + c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = 0 \tag{3}$$

con i coefficienti c_i non tutti nulli. Dividendo per c,(supponendo $c \neq 0$) e riarrangiando, otteniamo:

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n. \tag{4}$$

Nell'ottenere l'equazione (4), abbiamo definito $u_i = -\frac{c_i}{c}$. Il significato della relazione sopra è che un qualsiasi vettore dello spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$ può essere espresso come combinazione lineare (con coefficienti non tutti nulli, altrimenti gli $n+1$ vettori sarebbero linearmente indipendenti e lo spazio vettoriale avrebbe dimensione maggiore di n, in contrasto alle nostre ipotesi) degli n vettori linearmente indipendenti. Questo set di vettori viene chiamato *base* dello spazio vettoriale. I coefficienti $c_i, i = 1, \dots, n$ sono le *componenti* del vettore $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\dots,n}$. La scelta della base non è univoca. Pensiamo ad esempio allo spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$: una qualsiasi terna di vettori non coplanari può fungere da base. La scelta usuale (canonica) e di scegliere i versori (vettori di modulo unitario) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ diretti lungo gli assi X, Y, Z, di un sistema di riferimento cartesiano.

È possibile dimostrare che ogni vettore dello spazio vettoriale può essere scritto come combinazione lineare dei vettori di base con una scelta *unica* dei coefficienti. Supponiamo infatti che dato un vettore $\boldsymbol{v}$, esistano due combinazioni lineari con diversi coefficienti tali che $\boldsymbol{v} = \sum_i a_i\boldsymbol{u}_i$ e $\boldsymbol{v} = \sum_i b_i\boldsymbol{u}_i$. Allora

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \sum_i (a_i - b_i)\boldsymbol{u}_i = 0_{\mathcal{V}} \Leftrightarrow a_i = b_i. \tag{5}$$

Quindi fissata una base dello spazio vettoriale esiste una corrispondenza 1:1 tra vettori dello spazio e le ennuple di coefficienti $\{a_i\}_{i=1\dots,N}$.

2 Proprietà dei vettori: trasformazioni

Nello spazio bidimensionale $\mathbb{R}^2$ è naturale scegliere i versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ diretti lungo gli assi X e Y come vettori di base. Ogni vettore $\boldsymbol{r}$ può essere espresso in maniera unica attraverso una combinazione lineare degli elementi di base:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \tag{6}$$

con componente x lungo la direzione di $\boldsymbol{i}$ (ovvero l'asse X) e componente y lungo la direzione di $\boldsymbol{j}$ (ovvero l'asse Y).

Supponiamo adesso di ruotare i vettori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ in senso antiorario, attorno a un asse verticale (asse Z, perpendicolare al foglio della pagina) di un angolo α, come mostrato in Figura 1. Se indichiamo con $R \equiv R(\alpha)$ il corrispondente operatore di rotazione, che trasforma il vettore $\boldsymbol{i}$ nel vettore $\boldsymbol{i}'$ e il vettore $\boldsymbol{j}$ nel vettore $\boldsymbol{j}'$:

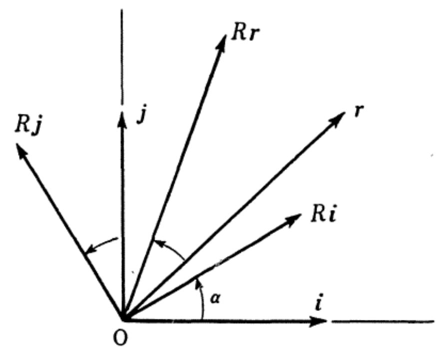

Figure 1: Rotazione dei vettori di base del piano.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}' &= R(\alpha)\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha & (7)\\ \boldsymbol{j}' &= R(\alpha)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha & (8) \end{aligned}$$

Possiamo scrivere, in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{9}$$

dove abbiamo definito la matrice di rotazione

$$\hat{R} \equiv \hat{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{10}$$

In notazione condensata, possiamo quindi scrivere:

$$\begin{bmatrix} R\boldsymbol{i} & R\boldsymbol{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \end{bmatrix} \hat{R}(\alpha). \tag{11}$$

Consideriamo adesso il risultato dell'applicazione dell'operatore di rotazione $R(\alpha)$ su un generico vettore $\boldsymbol{r}$, con componenti x e y, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. Denotiamo il risultato dell'operazione con $\boldsymbol{r}' \equiv R(\alpha)\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$. Vogliamo ricavare una relazione tra le componenti dei vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$. Dal momento che l'operatore di rotazione R è lineare, possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r} &= R(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = xR\boldsymbol{i} + yR\boldsymbol{j} = x\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}' \\
&= x(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha) + y(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha) \\
&= \boldsymbol{i}(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + \boldsymbol{j}(x\sin\alpha + y\cos\alpha)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Quindi, introducendo le matrici colonna con le componenti dei vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$, la relazione sopra può essere scritta in forma matriciale come:

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \hat{R}(\alpha) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}
$$

In accordo alle equazioni (11) e (13), esiste una fondamentale differenza tra le proprietà di trasformazione dei vettori di base, e delle componenti di vettori. Questa differenza in notazione sarà importante nel proseguio.

I risultati ottenuti per il caso speciale del piano cartesiano, possono essere facilmente generalizzati alle tre dimensioni, o al caso generale di dimensione n. Nello spazio cartesiano un qualsiasi operatore di rotazione può essere parametrizzato attraverso tre angoli (detti angoli di Eulero, *vide infra*), e la matrice di trasformazione sarà una matrice quadrata 3×3.

Consideriamo adesso uno spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$, di dimensione n, e una sua base $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$. Consideriamo inoltre un generico operatore lineare, che operi sui vettori dello spazio $\mathcal{V}^n$ e tale che $T\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$. Un operatore lineare gode delle seguenti proprietà:

L1: $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}^n$

L2: $T(c\boldsymbol{u}) = cT\boldsymbol{u}$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$, $\forall c \in K$.

Ogni vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$ può essere espresso, in maniera unica, come combinazione lineare dei vettori di base $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$: $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{a}_n$. Consideriamo dapprima il risultato dell'applicazione dell'operatore R sul generico vettore di base, $T\boldsymbol{a}_k$; dal momento che $T\boldsymbol{a}_k \in \mathcal{V}^n$, può essere espresso come combinazione lineare dei vettori di base, con coefficienti T_{ik}, che definiscono una matrice quadrata $n \times n$, $\hat{T}$:

$$
\boldsymbol{a}'_k = T\boldsymbol{a}_k = \sum_i \boldsymbol{a}_i T_{ik} \tag{14}
$$

$$
\hat{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ T_{n1} & T_{n2} & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} \tag{15}
$$

Raggruppando i vettori di base in una matrice riga, è quindi possibile scrivere:

$$\begin{bmatrix} T\boldsymbol{a}_1 & T\boldsymbol{a}_2 & \ldots & T\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & \ldots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & \ldots & T_{2n} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ T_{n1} & T_{n2} & \ldots & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} \tag{16}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \ldots & \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \hat{T}. \tag{17}$$

Avendo definito le proprietà di trasformazione dei vettori di base, consideriamo adesso la trasformazione di un generico vettore dello spazio, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$. Dal momento che $T\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$, esso può essere scritto come combinazione lineare, con coefficienti unici, dei vettori di base:

$$T\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}' = u'_1\boldsymbol{a}_1 + u'_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + u'_n\boldsymbol{a}_n \tag{18}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{u} &= T(u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + u_n\boldsymbol{a}_n) \\ &= T(\sum_i u_i\boldsymbol{a}_i) = \sum_i u_i(\sum_j \boldsymbol{a}_j T_{ji}) \\ &= \sum_j \boldsymbol{a}_j(\sum_i T_{ji}u_i). \end{aligned} \tag{19}$$

Confrontando le equazioni (18) e (19), si ottiene:

$$u'_j = \sum_i T_{ji}u_i \tag{20}$$

con $j = 1, \ldots, n$, che può essere scritta in forma matriciale estesa:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ . \\ . \\ . \\ u'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & \ldots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & \ldots & T_{2n} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ T_{n1} & T_{n2} & \ldots & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

oppure:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ . \\ . \\ . \\ u'_n \end{bmatrix} = \hat{T} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

Se la matrice $\hat{T}$ non è singolare, (ovvero il suo determinante, $|\hat{T}| \neq 0$), la matrice $\hat{T}$ possiede un'inversa, $\hat{T}^{-1}$ e la relazione sopra può essere risolta per i coefficienti $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = \hat{T}^{-1} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u'_n \end{bmatrix} \tag{23}$$

L'effetto di due trasformazioni successive, S e T su un generico vettore di base, $ST\boldsymbol{a}_k$ può essere scritto come:

$$\begin{aligned} S(T\boldsymbol{a}_k) &= S(\sum_j \boldsymbol{a}_j T_{jk}) = \sum_j T_{jk} S\boldsymbol{a}_j \\ &= \sum_i (\sum_j S_{ij} T_{jk}) \boldsymbol{a}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{a}_i (\hat{S}\hat{T})_{ik} \end{aligned} \tag{24}$$

ovvero l'effetto della trasformazione ST viene espresso attraverso il prodotto delle matrici corrispondenti agli operatori, nello stesso ordine di applicazione degli stessi. Nota che la moltiplicazione matriciale non è in genere commutativa e quindi l'ordine dei fattori è importante. Dalla derivazione sopra, ne segue che se il vettore $\boldsymbol{u}''$ di componenti $\{u''_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è relazionato al vettore $\boldsymbol{u}$ attraverso $\boldsymbol{u}'' = ST\boldsymbol{u}$, possiamo scrivere per le componenti dei vettori:

$$\begin{bmatrix} u''_1 \\ u''_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u''_n \end{bmatrix} = \hat{S}\hat{T} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}. \tag{25}$$

2.1 Cambiamento di base

Dal momento che la scelta del set di base non è unica, consideriamo due differenti set di base nello stesso spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, e $\{\boldsymbol{a}'_i\}_{i=1,\ldots,n}$. La base $\{\boldsymbol{a}'_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è ottenuta dalla prima base attraverso una trasformazione non singolare T, descritta da una matrice $\hat{T}$ nella base $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ di $\mathcal{V}^n$. Per ipotesi quindi, $T\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. In forma matriciale possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \ldots & \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \hat{T} \tag{26}$$

e dal momento che la trasformazione T possiede inversa, T^{-1}, vale anche:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \dots & \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix} \hat{T}^{-1} \tag{27}$$

oppure

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_l \boldsymbol{a}'_l (\hat{T}^{-1})_{lk} \tag{28}$$

Consideriamo adesso una generica trasformazione lineare A sullo spazio $\mathcal{V}^n$, con matrice rappresentativa $\hat{A}$ nella base $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\dots,n}$, e matrice rappresentativa $\hat{A}'$ nella base $\{\boldsymbol{a}'_i\}_{i=1,\dots,n}$. Vogliamo ricavare la relazione che esiste tra le matrici $\hat{A}$ e $\hat{A}'$.

Dalle relazioni:

$$A\boldsymbol{a}_i = \sum_j \boldsymbol{a}_j A_{ji} \tag{29}$$

e

$$A\boldsymbol{a}'_i = \sum_j \boldsymbol{a}'_j A'_{ji} \tag{30}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{a}'_i &= A(\sum_j \boldsymbol{a}_j T_{ji}) = \sum_j T_{ji} A\boldsymbol{a}_j \\ &= \sum_j \sum_k \boldsymbol{a}_k A_{kj} T_{ji} = \sum_j \sum_k \sum_l \boldsymbol{a}'_l (\hat{T}^{-1})_{lk} A_{kj} T_{ji} \\ &= \sum_l \boldsymbol{a}'_l (\hat{T}^{-1}\hat{A}\hat{T})_{li} \end{aligned} \tag{31}$$

Confrontando le equazioni (29) e (30) si conclude che le matrici rappresentative $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ della trasformazione A nelle basi $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\dots,n}$ e $\{\boldsymbol{a}'_i\}_{i=1,\dots,n}$ sono legate dalla relazione $\hat{A}' = \hat{T}^{-1}\hat{A}\hat{T}$.

3 Sottospazi e sottospazi invarianti

Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{V}'$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, è un sottospazio di $\mathcal{V}$ se:

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}'$
2. $\forall c \in K, \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}'$, $c\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}'$

Si può facilmente dimostrare che date le due condizioni sopra, $\mathcal{V}'$ soddisfa tutti gli assiomi di spazio vettoriale. Due sottospazi triviali di $\mathcal{V}$ sono il sottospazio costituito dal vettore nullo, e $\mathcal{V}$ stesso.

Se, dati due sottospazi di $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ e $\mathcal{V}''$ un qualsiasi vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ può essere scritto in maniera unica come $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}''$ con $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{V}'$ e $\boldsymbol{u}'' \in \mathcal{V}''$, allora si dice che lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è stato decomposto in una somma diretta dei sottospazi $\mathcal{V}'$ e $\mathcal{V}''$, e si scrive $\mathcal{V} = \mathcal{V}' + \mathcal{V}''$. $\mathcal{V}''$ è il sottospazio *complementare* di $\mathcal{V}'$. Ne segue inoltre che se denotiamo con n, n' e n'' le dimensioni di $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$, e $\mathcal{V}''$ rispettivamente, n=$n' + n''$. Una base di $\mathcal{V}$ può essere costruita dall'unione di una base di $\mathcal{V}'$ e di una base di $\mathcal{V}''$. Questa base speciale è detta *adattata alla decomposizione* $\mathcal{V}' + \mathcal{V}''$.

Supponiamo ora di avere un operatore lineare su uno spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$ e sia $\mathcal{V}^{n'}$ un sottospazio di $\mathcal{V}^n$. Se dato un qualsiasi vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^{n'}$, $A\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^{n'}$, allora $\mathcal{V}^{n'}$ è un *sottospazio invariante* di $\mathcal{V}^n$ rispetto all'operatore A. Se $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1,\ldots,n'}$ è una base di $\mathcal{V}^{n'}$, di dimensione n', dal momento che $\mathcal{V}^{n'}$ è invariante per A,

$$A\boldsymbol{u}_k = \sum_{j=1}^{n'} \boldsymbol{u}_j A_{jk} \tag{32}$$

dove $k, j = 1, \ldots, n'$. Se adesso costruiamo una base di $\mathcal{V}^n$ aggiungendo alla base di $\mathcal{V}^{n'}$ $n - n'$ vettori linearmente indipendenti, la matrice rappresentativa di un qualsiasi operatore lineare in $\mathcal{V}^n$ sarà a blocchi come in Figura 2, dal momento che possiamo sempre scrivere ($l = n' + 1, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{u}_l &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}_j A_{jl} \\ &= \sum_{j'=1}^{n'} \boldsymbol{u}_{j'} A_{j'l} + \sum_{j''=n'+1}^{n} \boldsymbol{u}_{j''} A_{j''l} \end{aligned} \tag{33}$$

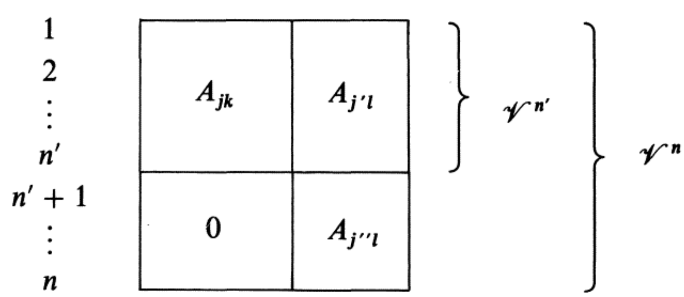

Figure 2: Struttura a blocchi della matrice $\hat{A}$.

4 Spazi Metrici

Fino ad ora non abbiamo introdotto concetti come la distanza (norma) e la ortogonalità dei vettori. Per definire questi concetti in uno spazio vettoriale, dobbiamo introdurre la definizione di *prodotto scalare*. Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ in cui sia definito un prodotto scalare, è chiamato *spazio vettoriale metrico*.

Dati due vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, il prodotto scalare, simboleggiato con $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, ha le seguenti proprietà:

S1: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^*$

S2: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

S3: $(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \forall c \in K$

S4: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$

S5: $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = 0$ (il vettore nullo)

Dalle definizioni sopra segue che $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, dove il simbolo * significa il complesso coniugato, se lo scalare $c \in \mathbb{C}$. Dal momento che per ogni vettore $\boldsymbol{u} \neq 0$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$ possiamo definire una quantita strettamente positiva, detta *norma* del vettore, $|\boldsymbol{u}|$ come

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}. \tag{34}$$

Due vettori $\boldsymbol{u} \neq 0$ e $\boldsymbol{v} \neq 0$ sono detti *ortogonali*, se $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

4.1 Base ortonormale

Uno spazio metrico $\mathcal{V}^n$ di dimensione n possiede una base di n vettori linearmente indipendenti, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,\ldots,n}$. Per applicazione di una trasformazione lineare non singolare ai vettori di base (ad esempio attraverso la procedura di Gram e Schmidt) possiamo ottenere una nuova base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, che soddisfa alla condizione

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}. \tag{35}$$

dove δ_{ij}, *delta di Kronecker*, è definito come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{36}$$

I vettori della base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sono mutuamente ortogonali, e hanno norma unitaria, e quindi la nuova base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è detta *base ortonormale*. Dati due qualsiasi vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$,$\boldsymbol{u} = \sum_i \boldsymbol{e}_i u_i$ e $\boldsymbol{v} = \sum_j \boldsymbol{e}_j v_j$, il loro prodotto scalare può essere scritto come:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= (\sum_i \boldsymbol{e}_i u_i, \sum_j \boldsymbol{e}_j v_j) = \sum_i \sum_j u_i^* v_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_i \sum_j u_i^* v_j \delta_{ij} = \sum_i u_i^* v_i \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Quindi $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \sum_i u_i^* u_i = \sum_i |u_i|^2$ e la sua norma è data da

$$
|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\sum_i |u_i|^2}. \qquad (38)
$$

È sempre conveniente introdurre una base ortonormale, dal momento che porta a molte semplificazioni nelle manipolazioni algebriche, come vedremo in seguito. Da qui in avanti assumeremo quindi di lavorare con una base ortonormale.

4.2 Operatori unitari e matrici unitarie

Dato uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ ed un operatore U, se U trasforma vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ in accordo alla relazione:

$$
(U\boldsymbol{u}, U\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \qquad (39)
$$

allora l'operatore U è detto *unitario* e conserva i prodotti scalari (ovvero le distanze). In termini di componenti possiamo scrivere $u'_i = \sum_j U_{ij} u_j$ ($\boldsymbol{u}' = U\boldsymbol{u}$) e $v'_i = \sum_j U_{ij} v_j$ ($\boldsymbol{v}' = U\boldsymbol{v}$). Al solito U_{ij} sono gli elementi della matrice rappresentativa dell'operatore U, $\hat{U}$, nella base dello spazio, che supponiamo ortonormale. Il prodotto scalare $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_i u_i^* v_i$, mentre $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}')$ può essere scritto come:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}') &= \sum_i u_i'^* v_i' = \sum_i (\sum_j U_{ij} u_j)^* (\sum_k U_{ik} v_k) \\
&= \sum_j \sum_k (\sum_i U_{ij}^* U_{ik}) u_j^* v_k \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Ne segue quindi che se U è unitario, gli elementi della sua matrice rappresentativa $\hat{U}$, devono soddisfare alla condizione:

$$
\sum_i U_{ij}^* U_{ik} = \delta_{jk} \qquad (41)
$$

Definendo la matrice coniugata Hermitiana $\hat{U}^\dagger$ tale che

$$
(\hat{U}^\dagger)_{ij} = U_{ji}^* \qquad (42)
$$

(ovvero $\hat{U}^\dagger$ è ottenuta da $\hat{U}$ invertendo righe con colonne e prendendo il complesso coniugato degli elementi) la relazione sopra può essere scritta in forma matriciale come

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = I \tag{43}$$

dove I è la matrice identica. Le matrici che soddisfano alla relazione (43) sono dette *matrici unitarie.*

4.3 Operatori Hermitiani e matrici Hermitiane

Una matrice $\hat{H}$ tale che la sua matrice coniugata hermitiana, $\hat{H}^\dagger$ è eguale ad $\hat{H}$, ovvero $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, è detta *matrice Hermitiana.* I suoi elementi soddisfano alla condizione:

$$H_{ji}^* = H_{ij}. \tag{44}$$

5 Operatori Hermitiani e unitari e problemi ad autovalori

Le matrici Hermitiane e unitarie hanno in comune proprietà importanti nella struttura dei loro sottospazi invarianti. Considera una matrice rappresentativa Hermitiana o unitaria $\hat{A}$ dell'operatore lineare A.
Lemma: Se A trasforma un sottospazio $\mathcal{S}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ in se stesso (ovvero se $\mathcal{S}$ è un sottospazio invariante di $\mathcal{V}$), allora A trasforma anche il sottospazio complementare $\mathcal{S}^\perp$ in se stesso. Quindi sia $\mathcal{S}$ che $\mathcal{S}^\perp$ sono sottospazi invarianti rispetto all operatore A.
Dimostrazione: Se A è Hermitiano, la sua matrice rappresentativa sarà Hermitiana, e quindi:

$$\begin{aligned}
(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \sum_i (A\boldsymbol{u})_i^* v_i = \sum_i \sum_j (A_{ij} u_j)^* v_i \\
&= \sum_i \sum_j A_{ij}^* u_j^* v_i = \sum_i \sum_j A_{ji} u_j^* v_i = \sum_j u_j^* (\sum_i A_{ji} v_i) \\
&= \sum_j u_j^* (A\boldsymbol{v})_j = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{45}$$

Se $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}$ e $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Visto che per ipotesi $A\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}$,$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$, quindi $A\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$ quando $\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$ e $\mathcal{S}^\perp$ è anche invariante.

Nel caso in cui A è un operatore unitario, $(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Quindi $\forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}$ e $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$, dal momento che $A\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}$ $(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Quindi $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$, $A\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^\perp$ e e $\mathcal{S}^\perp$ è invariante.
Teorema: Matrici Hermitiane o unitarie posseggono una base di autovettori.
Dimostrazione: Si vogliono trovare tutti i vettori $\boldsymbol{u} \neq 0$ che soddisfano all'equazione:

$$A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{46}$$

Il vettore $\boldsymbol{u}$ è detto *autovettore* di A e λ è il corrispondente *autovalore*.

In componenti, ($\boldsymbol{u} = \sum_i c_i \boldsymbol{e}_i$) possiamo riscrivere l'equazione (46) come:

$$(A\boldsymbol{u})_i = \sum_j A_{ij} c_j = \lambda c_i \tag{47}$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la dimensione dello spazio vettoriale. Riarrangiando otteniamo un sistema lineare ed omogeneo:

$$\sum_j (A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) c_j = 0 \tag{48}$$

Una soluzione non triviale ($c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$) si ottiene in corrispondenza a ben determinati valori di λ per i quali il determinante dei coefficienti è nullo, ovvero:

$$|(\hat{A} - \lambda \hat{I})| = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{49}$$

Espandendo il determinante, si ottiene un polinomio di grado n in λ, detto *polinomio caratteristico* (i cui coefficienti sono numeri reali o complessi). Il polinomio ha almeno una radice, λ_1, in corrispondenza del quale il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} (A_{11} - \lambda_1) c_1 + A_{12} c_2 + \ldots + A_{1n} c_n = 0 \\ A_{21} c_1 + (A_{22} - \lambda) c_2 + \ldots + A_{2n} c_n = 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ A_{n1} c_1 + A_{n2} c_2 + \ldots + (A_{nn} - \lambda) c_n = 0 \end{cases} \tag{50}$$

ammette una soluzione non triviale, $\boldsymbol{v}_1 \neq 0$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{51}$$

che è l'autovettore corrispondente all'autovalore λ_1. Consideriamo adesso il sottospazio $S_{n-1}^{\perp}$ di dimensione $n-1$ generato dai vettori ortogonali a $\boldsymbol{v}_1$. Dal momento che A è unitario o Hermitiano, il sottospazio $S_{n-1}^{\perp}$ è invariante, e il problema di trovare gli $n-1$ restanti autovettori e autovalori ha una dimensione $n-1$ (il polinomio caratteristico avrà grado $n-1$). Un autovettore $\boldsymbol{v}_2$ può essere trovato in $S_{n-1}^{\perp}$. All'interno di $S_{n-1}^{\perp}$, i vettori ortogonali a $\boldsymbol{v}_2$ generano un sottospazio di dimensione $n-2$, $S^{\perp}_{n-2}$. Procedendo in questa maniera, si ottiengono n autovettori, che sono mutuamente ortogonali per costruzione. Questi possono essere normalizzati, e alla fine otteniamo n autovettori ortonormali e i corrispondenti autovalori:

$$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k \tag{52}$$

con $k = 1, 2, \ldots, n$ che soddisfano alla condizione di ortonormalità

$$(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_l) = \delta_{kl}. \tag{53}$$

Nella base degli autovettori, la matrice rappresentativa $\hat{A}$ dell'operatore A è diagonale:

$$A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}. \tag{54}$$

6 Gruppi di trasformazioni lineari

Gli operatori lineari T nello spazio vettoriale $\mathcal{V}^n$ sono rappresentati da matrici $\hat{T} = [T_{ik}]$ una volta effettuata la scelta di una base dello spazio vettoriale. Quando la matrice non è singolare, esiste la matrice inversa $\hat{T}^{-1}$. Dati due operatori T e S, rappresentati dalle matrici $\hat{T}$ e $\hat{S}$, il prodotto ST degli operatori è rappresentato dalla matrice non singolare $\hat{S}\hat{T}$ (ricorda che $|\hat{S}\hat{T}| = |\hat{S}||\hat{T}|$). Quindi il set delle matrici non singolari $n \times n$ costituisce un gruppo (non commutativo) sotto l'operazione di moltiplicazione matriciale. Infatti, i) il set è chiuso sotto l'operazione di moltiplicazione matriciale, ii) la moltiplicazione matriciale gode della proprietà associativa, iii) l'elemento neutro è la matrice identica $n \times n$, e iv) le matrici sono invertibili. Questo gruppo è chiamato *gruppo delle trasformazioni lineari*. In particolare, se gli elementi delle matrici sono numeri complessi, il gruppo è chiamato *gruppo generale lineare complesso* di ordine n:

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{\hat{A} = [A_{ik}] | i, k = 1, 2, \ldots, n; A_{ik} \in \mathbb{C}, |\hat{A}| \neq 0\}.$$

Se gli elementi di matrice sono numeri reali, il gruppo è chiamato *gruppo generale lineare reale* di ordine n

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{\hat{A} = [A_{ik}] | i, k = 1, 2, \ldots, n; A_{ik} \in \mathbb{R}, |\hat{A}| \neq 0\}.$$

In $GL(n, \mathbb{C})$ e $GL(n, \mathbb{R})$ i sottoinsiemi che soddisfano alla condizione $|\hat{A}| = 1$ costituiscono dei sottogruppi, che sono chiamati *gruppi lineari speciali complessi (reali)* di ordine n:

$$\begin{aligned} SL(n, \mathbb{C}) &= \{\hat{A} \in GL(n, \mathbb{C}) || \hat{A}| = 1\}. \\ SL(n, \mathbb{R}) &= \{\hat{A} \in GL(n, \mathbb{R}) || \hat{A}| = 1\}. \end{aligned}$$

Il set di matrici unitarie $n \times n$:

$$U(n) = \{\hat{U}|U_{ik} \in \mathbb{C}, \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}\} \quad (55)$$

è chiamato *gruppo unitario*. Il sottogruppo di $U(n)$ formato dalle matrici unitarie che soddisfano alla condizione $|\hat{U}| = 1$ è chiamato *gruppo unitario speciale*:

$$SU(n) = \{\hat{U}| \in U(n)||\hat{U}| = 1\} \quad (56)$$

In U(n) e SU(n) gli elementi di matrice sono in geneale complessi. Nel caso particolare di numeri reali otteniamo il *gruppo ortogonale*, O(n),

$$O(n) = \{\hat{O}|O_{ik} \in \mathbb{R}, \hat{O}\hat{O}^t = \hat{O}^t\hat{O} = \hat{1}\} \quad (57)$$

e il *gruppo ortogonale speciale*, SO(n).

$$SO(n) = \{\hat{O}| \in O(n)||\hat{O}| = 1\}. \quad (58)$$

Ad esempio O(3) è il gruppo formato dalle trasformazioni ortogonali dello spazio Euclidiano tridimensionale. SO(n) è l'estensione a n dimensioni, del gruppo delle rotazioni proprie, SO(3). Tutti questi gruppi sono detti *gruppi classici*.

7 Esercizi

Esercizio 3.1: Dimostra che se $\hat{A}$ è una matrice Hermitiana, i suoi autovalori sono reali.
Per definizione, $\lambda_i = (\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i)$ se assumiamo che l'autovettore $\boldsymbol{v}_i$ è normalizzato. Dal momento che A è un operatore Hermitiano, $(\boldsymbol{v}_i, A\boldsymbol{v}_i) = (A\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i)$ ovvero $\lambda_i = \lambda_i^*$ da cui segue che $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Esercizio 3.2: Dimostra che se $\hat{A}$ è una matrice unitaria, i suoi autovalori hanno modulo 1, ovvero $|\lambda_i|^2 = 1$. Se $\hat{A}$ è simmetrica, allora gli autovettori possono essere scelti reali.
Sia $\boldsymbol{v}$ autovettore di norma unitaria, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 1$, di A con autovalore λ. Dal momento che A è un operatore unitario abbiamo:

$$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = |\lambda|^2 = 1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \quad (59)$$

e $\lambda^* = \frac{1}{\lambda}$. In tutta generalità possiamo scrivere $\lambda = e^{i\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\hat{A}$ è anche *simmetrica*, $(\hat{A}^{-1})_{ij} = (\hat{A}^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} = A^*_{ij}$. Dato $\boldsymbol{v}$ autovettore di A con autovalore λ, A$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ e possiamo scrivere:

$$\sum_j A_{ij}v_j = \lambda_i v_i \quad (60)$$

Prendendo il complesso coniugato di entrambi i membri otteniamo:

$$\sum_j A^*_{ij}v^*_j = \sum_j (\hat{A}^{-1})_{ij}v^*_j = \lambda^*_i v^*_i \quad (61)$$

e conseguentemente $\boldsymbol{v}^*$ è autovettore di A^{-1} con autovalore λ^*, $A^{-1}\boldsymbol{v}^* = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}^*$. Riarrangiando otteniamo $A\boldsymbol{v}^* = \lambda\boldsymbol{v}^*$. Dal momento che sia $\boldsymbol{v}$ che $\boldsymbol{v}^*$ sono autovettori con lo stesso autovalore, una qualsiasi loro combinazione lineare sarà un autovettore di A con lo stesso autovalore. In particolare possiamo prendere le seguenti combinazioni lineari $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^*$ e $i(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^*)$, entrambe reali.