PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2016/17

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Prof. Dario Portelli

Trieste, 6/6/2017

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate !!!

1.– Sia M lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ delle matrici 2×2, ad entrate numeri reali. Ricordo che, se $A \in M$, allora la *traccia* di A è il numero reale $Tr(A)$ definito da

$$Tr(A) = a + d \qquad \text{se} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sia V il sottoinsieme di M formato da tutte le matrici con traccia $= 0$. Si verifichi che V è un sottospazio vettoriale di M, e se ne determini una base.

2.– Se $u = |u_1\ u_2\ u_3|$ e $v = |v_1\ v_2\ v_3|$ sono due qualsiasi elementi di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(u, v) := 2\,u_1v_1 + u_2v_1 + u_3v_1 + u_1v_2 + 2\,u_2v_2 + u_3v_2 + u_1v_3 + u_2v_3 + 2\,u_3v_3$$

i) Si verifichi che φ è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$.

ii) Si determini una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, ortogonale rispetto a φ del sottospazio $W = Span(\,(1, 2, 3)\,)$.

3.– Dire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f : \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad f : \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad f : \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

e, se esiste, dire se tale f è unica.

(continua sul retro del foglio)

4.– Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) L' endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è un automorfismo ?

ii) La matrice A è diagonalizzabile ?

iii) Nel caso in cui entrambe le domande precedenti abbiano risposta affermativa, che cosa si può dire degli autovalori e degli autospazi di L_A^{-1} ?

5.– Nello spazio metrico (o Euclideo) $\mathbb{R}^3$ esiste un piano ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane

$$r \quad \begin{cases} y & = & 3 \\ x + z & = & 0 \, . \end{cases}$$

e passante per il punto $P(4,5,8)$? Tale piano è unico ? Se lo è, si scriva una sua equazione cartesiana.

Esiste un piano parallelo alla retta r , e passante per il punto P ? Tale piano è unico ? Se ne scriva un' equazione cartesiana.

È possibile che un piano parallelo ad r e passante per P abbia distanza 10 dal punto $Q(0,-6,0)$?