Laurea Magistrale in Matematica

Università degli Studi di Trieste
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2 - A

Appello d'esame del 7 Giugno 2017

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. Nel piano $\mathbb{R}^2$ si considerino i tre punti p_1, p_2, p_3 di coordinate:

$$p_1 = (0,0), \quad p_2 = (2,0) \quad \text{e} \quad p_3 = (4,0).$$

Per ogni $r \in [0,\infty)$ e per $i = 1,2,3$ sia $B(p_i, r)$ la palla *chiusa* di centro p_i e raggio r e sia $M(r)$ l'insieme:

$$M(r) = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{3} B(p_i, r) \right).$$

(a) *(3 punti)* Per quali valori di $r \in [0,\infty)$ l'insieme $M(r)$ è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^2$?

(b) *(6 punti)* Si calcolino i gruppi di coomologia di $M(r)$ per ogni $r \in [0,\infty)$.

2. Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili. Sia $f\colon M_1 \to M_2$ un diffeomorfismo locale (cioè f è differenziabile, e $\forall p \in M_1$, il differenziale di f in p, $\mathrm{D}_p f\colon T_p M_1 \to T_{f(p)} M_2$, è un isomorfismo).

(a) *(6 punti)* Si dimostri che, se M_2 è orientabile, allora anche M_1 è orientabile.
(Suggerimento: si consideri $f^*(\omega)$, dove ω è una forma di volume di M_2.)

(b) *(3 punti)* Vale anche il viceversa? Ovvero, se M_1 è orientabile allora anche M_2 lo è? Motivare adeguatamente la risposta.

3.

(a) *(3 punti)* Si dimostri che $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^6$, definita come segue:

$$F(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\,,$$

è una immersione.

(b) *(3 punti)* Si deduca dal punto precedente che la restrizione $F_{|S^2}\colon S^2 \to \mathbb{R}^6$ di F alla sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1 è una immersione.

(c) *(6 punti)* Sia $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale. Si dimostri che la funzione $f\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^6$ definita da

$$f([x_0 : x_1 : x_2]) = \frac{1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} \left(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\right)$$

è una inclusione differenziabile.
(Suggerimento: si osservi che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = S^2/\{\pm 1\}$, dove la relazione di equivalenza è data da $(x_0, x_1, x_2) \sim \pm(x_0, x_1, x_2)$.)

(d) (**Facoltativo**) Si dimostri che la funzione $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^N$,

$$f([x_0 : \ldots : x_n]) = \left(\frac{x_ix_j}{\sum_{i=0}^n x_i^2}\ : 0 \leq i \leq j \leq n\right)$$

è una inclusione differenziabile, dove $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.