ESERCIZIO 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & k \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & k-3 \\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & k+3 \\ 0 & 0 & -7 & 19 & -18 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -19 & k+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-15 \end{array}\right)$$

Si vede che la matrice incompleta ha rango $\underline{3}$

- Il sistema lineare è compatibile per $k = 15$
- La dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è $4-3=1$

ESERCIZIO 2

Considero i tre vettori $v_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{vmatrix}$ $v_2 = \begin{vmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$ $v_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{vmatrix}$

Si verifica facilmente che:

$\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$ dunque v_1, v_2, v_3 è base di $\mathbb{R}^3$.
Indicheremo tale base con $\mathcal{B}$.

Le condizioni su f che il testo del problema dà, relative a v_1, v_2 sono

$$f(v_1) = -2v_1 = \begin{vmatrix} -4 \\ 6 \\ -14 \end{vmatrix} \qquad f(v_2) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0\, v_2$$

Quindi il polinomio caratteristico di f ha le due radici -2 e 0. Non conosciamo con quale molteplicità algebrica. Osservo che

$$f(v_3) = \begin{vmatrix} -4 \\ 6 \\ -14 \end{vmatrix} = -2v_1$$

Quindi, la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è data da

$$\overbrace{\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \end{array}}^{M_{\mathcal{B}}(f) =: A}$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

Si vede subito che tale matrice ha rango 1. Quindi $Ker(f)$ ha dimensione $3-1=2$. Ma $Ker(f)$ è l'autospazio relativo all'autovalore 0. Quindi f è diagonalizzabile. $p_f(t) = +t^2(-2-t)$

Altrimenti, se $\mathcal{B}_c$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$:

$$\underset{\ddot{B}}{\overset{\shortparallel}{M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}(f)}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 6 & 0 & 6 \\ -14 & 0 & -14 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underset{-2v_1}{\overset{f(v_1)}{\shortparallel}} & \underset{0}{\overset{f(v_2)}{\shortparallel}} & f(v_3) \end{array} & \end{array}$$

$rg(B)=1 \Longrightarrow \dim(Ker(f))=2$

So già che -2 e 0 sono autovalori di f, quindi posso concludere che $m_g(0)=2$ (come sopra), ed f è diagonalizzabile.

Altrimenti: $M_{\mathcal{B}_c}(f) = M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}_c}(f) = M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^3})$ (*)

$$M_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} = P \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^3}) = P^{-1}$$

Calcolo P^{-1}

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{matrix}}_{P} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right) \sim \cdots\cdots$$

Verifico, poi, d'aver davvero trovato P^{-1}, cioè calcolo PP^{-1}. Se trovo I_3 vado avanti.

Quando ho P^{-1}, con (*) trovo $M_{\mathcal{B}_c}(f)$.

Faccio infine la procedura standard a partire da $M_{\mathcal{B}_c}(f)$

ESERCIZIO 3

La definizione di prodotto scalare non viene qui trascritta. "Qui" = in questa correzione.

Presi comunque $u, u', v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}
S(u+u',v) &\overset{\text{def. di } S}{=} \varphi_1(u+u',v)+\varphi_2(u+u',v) \overset{\text{linearità di } \varphi_1, \varphi_2 \text{ nel } 1^\circ \text{ argomento}}{=} \\
&= \varphi_1(u,v)+\varphi_1(u',v)+\varphi_2(u,v)+\varphi_2(u',v) \overset{\text{proprietà commut. e associativa di } + \text{ in } \mathbb{R}}{=} \\
&= [\varphi_1(u,v)+\varphi_2(u,v)] + [\varphi_1(u',v)+\varphi_2(u',v)] \overset{\text{def. di } S}{=} \\
&= S(u,v)+S(u',v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\lambda u,v) &= \varphi_1(\lambda u,v)+\varphi_2(\lambda u,v) = \lambda\varphi_1(u,v)+\lambda\varphi_2(u,v) = \\
&= \lambda[\varphi_1(u,v)+\varphi_2(u,v)] = \lambda S(u,v)
\end{aligned}$$

le giustificazioni dei vari passaggi sono simili a quelle della proprietà precedente.

Dunque <u>S è lineare nel primo argomento</u>. Inoltre

$$S(u,v) \overset{\text{def. di } S}{=} \varphi_1(u,v)+\varphi_2(u,v) \overset{\varphi_1 \text{ e } \varphi_2 \text{ sono simmetriche}}{=} \varphi_1(v,u)+\varphi_2(v,u) \overset{\text{def. di } S}{=} S(v,u) \quad \forall u,v\in V$$

Quindi <u>S è simmetrica</u>. Per la proprietà precedente si ha allora che S è anche lineare nel secondo argomento:

- $S(u,v+v') = S(v+v',u) = S(v,u)+S(v',u) = S(u,v)+S(u,v')$ $\quad \forall u,v,v'\in V \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$
- $S(u,\lambda v) = S(\lambda v,u) = \lambda S(v,u) = \lambda S(u,v)$

Pertanto <u>S è bilineare</u>.

Verifichiamo, infine, che S è definita positiva. Per ogni $v\in V$ si ha:

$$S(v,v) = \overbrace{\varphi_1(v,v)}^{\geq 0} + \overbrace{\varphi_2(v,v)}^{\geq 0} \quad \text{dunque} \quad \underline{S(v,v)\geq 0}$$

Se si ha $S(v,v) = \underbrace{\varphi_1(v,v)}_{\geq 0} + \underbrace{\varphi_2(v,v)}_{\geq 0} = 0$

allora necessariamente $\varphi_1(v,v)=0$, dunque $\underline{v=0}$.
Quindi <u>S è un prodotto scalare su V.</u>
Per concludere

$$\|v\|_S^2 = S(v,v) = \varphi_1(v,v) + \varphi_2(v,v) = \|v\|_{\varphi_1}^2 + \underbrace{\varphi_2(v,v)}_{>0 \text{ perché } v\neq 0,}$$

da cui

$$\|v\|_S^2 > \|v\|_{\varphi_1}^2 \quad \text{e quindi} \quad \underline{\|v\|_S > \|v\|_{\varphi_1}}$$

ESERCIZIO 4

Analizzo la situazione geometrica.
Sostituendo le coordinate di P nelle equazioni di s (basta farlo nella prima equazione) si vede che $\underline{P \notin s}$.
$P \in r$? Se fosse vero che $P \in r$, allora per un opportuno $t \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$\begin{cases} 0 = 2+3t & \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \\ 5 = 1+2t \\ 1 = -1-t & \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

dunque un t come richiesto non esiste, e si conclude $\underline{P \notin r}$

Trovo coordinate cartesiane per r:

$$t = -1-z \Rightarrow \begin{cases} x = 2+3(-1-z) \\ y = 1+2(-1-z) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \quad +3z = -1 \\ \quad y +2z = -1 \end{cases}$$

$r \cap s = ?$ Metto a sistema le equazioni cartesiane di r con quelle di s:

$$\begin{cases} x \quad +3z = -1 \\ \quad y + 2z = -1 \\ x+y+z = 4 \\ x-y+5z = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 3$

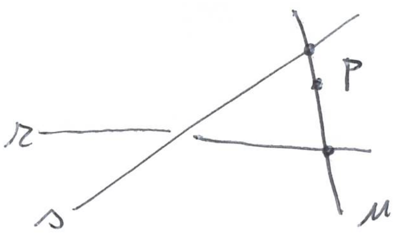
$rg(A|b) = 4$

dunque $r \cap s = \emptyset$

La direzione di r è generata dal vettore $(3, 2, -1)$. Ma tale vettore non è soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$$ che fornisce la direzione di s

Pertanto r ed s non sono parallele; essendo $r \cap s = \emptyset$, <u>le due rette sono sghembe</u>.



<u>Se</u> esiste una retta u come richiesto dal problema, allora essa è contenuta sia nel piano α passante per r e per P, sia nel piano β passante per s e per P. Precisamente si ha $u = \alpha \cap \beta$.

Determino α e β.

L'equazione cartesiana del generico piano per r è:

$$\lambda(x + 3z + 1) + \mu(y + 2z + 1) = 0 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Impongo il passaggio per P:

$$\lambda(0 + 3 + 1) + \mu(5 + 2 + 1) = 0 \qquad 4\lambda + 8\mu = 0 \qquad \lambda + 2\mu = 0$$

$\lambda = 2 \quad \mu = -1$ è una soluzione. Il piano α ha equazione $2x - y + 4z = -1$

Analogamente si trova:

$$\beta \qquad x + \quad 3z = 3$$

Dunque

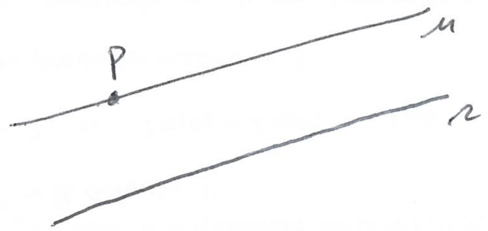
$$u \quad \begin{cases} x + 3z = 3 \\ 2x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

Verifico, infine, se u verifica le condizioni richieste: $P \in u$ è verificata.

Osservo che $(3,2,-1)$ verifica il S.L. omogeneo

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases}$$ che fornisce la direzione di u

Dunque $u \parallel r$



Ma $P \in u$, $P \notin r$

Pertanto $\underline{\underline{u \cap r = \emptyset}}$

Questo fatto può anche essere verificato direttamente, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di u e di r.

Con questo metodo si verifica, volendo, che $u \cap s \neq \emptyset$.

In conclusione, <u>non esiste</u> la retta u richiesta dal problema.