PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2016/17

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Prof. Dario Portelli

Trieste, 11/7/2017

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate!!!

1.– Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z, t, dipendente dal parametro a in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - 3z + t & = 1 \\ x + y + z - t & = 0 \\ x + y - a\,z & = 0 \end{cases}$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema lineare è compatibile?

Per ciascuno di tali a si determini l' insieme delle soluzioni del relativo sistema lineare.

2.– Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ x + y - z \end{pmatrix} \qquad\qquad g\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + t \\ t \\ s + 2t \end{pmatrix}$$

Sia $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la loro composizione.

Si determini la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$ che rappresenta $g \circ f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si determinino una base di $\ker(g \circ f)$ ed una base di $\mathrm{im}(g \circ f)$.

Si dica se $g \circ f$ è diagonalizzabile.

3.– Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare $g \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$g\left(\left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right| , \left| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} \right| \right) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$$

(continua sul retro del foglio)

Si determini la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ che rappresenta g rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si dimostri che g è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Si consideri il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$, generato dai vettori

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

con il prodotto scalare $g_{|V}$ indotto da g. Si determini una base di V formata da vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare g.

4.– Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ dotato del solito sistema di coordinate x, y, z, si considerino la retta r passante per il punto $P(1,1,0)$ ed avente direzione generata dal vettore $u = (2, -1, \sqrt{2})$, e la retta s passante per il punto $Q(1,2,3)$ ed avente direzione generata dal vettore $v = (1,2,3)$.

Si determinino equazioni parametriche e cartesiane sia per r che per s.

Si dimostri che r ed s sono rette sghembe.

Si determinino due piani paralleli α e β, tali che $r \subset \alpha$ ed $s \subset \beta$.