

ESERCIZIO 1

(1)

Risolvere il S.L. mediante l'algoritmo di elim. di Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -a & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-a & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1-a & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{2}-\frac{a}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{a}{4} \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{a}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{a}{4} \end{array} \right) = (A \parallel B) \quad \text{matrice completa}$$

$$\text{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{a \neq 1} \quad \text{in tal caso il sist. \u00e8 compatibile.}$$

Se $a=1$ allora $-\frac{1}{4} - \frac{a}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$ ed il sistema non \u00e8 compatibile.

Se $\underline{a \neq 1}$. Allora l'ultima equazione \u00e8 $(2-2a)t = -(1+a)$

e $t = -\frac{1+a}{2-2a}$. Sostituita nelle prime due, in cui prendo y come parametro libero, trovo:

$$(x, y, z, t) = \left(-y - \frac{1+a}{4-4a} + \frac{1}{4}, y, -\frac{1+a}{4-4a} + \frac{1}{4}, -\frac{1+a}{2-2a} \right)$$

Si osserva che $(-y, y, 0, 0)$ \u00e8 la soluzione generale del S.L. omogeneo associato al SL dato.

ESERCIZIO 2

(2)

La matrice che rappresenta $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, la matrice che rappresenta $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ risp. alle basi canoniche è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se B è la base canonica di $\mathbb{R}^3$, allora la matrice che rappresenta $g \circ f$ rispetto a B è

$$M_B^B(g \circ f) = B \cdot A \quad \begin{matrix} 3 \times 2 & 2 \times 3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} =: M$$

Per trovare $\text{Ker}(f)$ basta risolvere il S.L. omogeneo $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osserva: le prime due righe di M sono linearmente indipendenti. La terza riga è la somma delle prime due. Dunque $\text{rg}(M) = 2$. In particolare

$$2 = \text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(L_M)) = \dim(\text{Im}(g \circ f))$$

Ora: Una base di $\text{Im}(g \circ f)$ è data dalle ultime 2 colonne di M che sono $(g \circ f)(e_2)$ e $(g \circ f)(e_3)$

$$(g \circ f)(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3(g \circ f)(e_2) + 2(g \circ f)(e_3) = (g \circ f)(3e_2 + 2e_3)$$

$$\text{Dunque } e_1 - 3e_2 - 2e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g \circ f) \quad \begin{matrix} \text{chiamo } v \\ \text{tale vettore} \end{matrix}$$

Dalla Formula di dimensione per un'applicazione lineare

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(g \circ f)) + \dim(\text{Im}(g \circ f)) \quad \begin{matrix} \text{segue} \\ \dim(\text{Ker}(g \circ f)) = 1 \end{matrix}$$

$\overset{11}{3} \qquad \qquad \qquad \overset{11}{2}$

Per tanto il vettore v è una base di $\text{Ker}(f)$.

(3)

Infine

$$p_M(t) = \det(M - tI_3) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & -1 \\ 4 & 2 & -1-t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 1-t \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t)(1-t)(-1-t) - 4 + 2(3-t) + 1+t =$$

$$= -(3-t)(1-t^2) - 4 + 6 - 2t + 1 + t = -(3 - 3t^2 - t + t^3) + 3 - t =$$

$$= -3 + 3t^2 + t - t^3 + 3 - t = t^2(3-t)$$

L'autore $t=0$ ha mult. algebrica 2. Ma la sua molteplicità geometrica è $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) = 1$.

Dunque $g \circ f$ non è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 3

La matrice che rappresenta g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} g(e_1, e_1) & g(e_1, e_2) & g(e_1, e_3) \\ g(e_2, e_1) & g(e_2, e_2) & g(e_2, e_3) \\ g(e_3, e_1) & g(e_3, e_2) & g(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

Verifichiamolo

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} M \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + 2y_1 & z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 x_2 + y_1 x_2 + x_1 y_2 + 2 y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad \underline{\text{OK}}$$

Il test dell'esercizio mi dice che g è bilineare.
 M è una matrice simmetrica, dunque g è simmetrica.

$$1 = m_{11} > 0 \quad \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

↑
Laplace

} dunque g è
anche
definita
positiva

Bonzo

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$v_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Allora

$$v_2 = v_1 + v_3$$

Poiché v_1, v_3 sono linearmente indipendenti

$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_3) =: V$ e v_1, v_3 è base di V . Applico a tale base il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Cerco un vettore $w_2 = av_1 + bv_3$ $a, b \in \mathbb{R}$ tale che $g(v_1, w_2) = 0$ ed, inoltre: $w_2 \neq 0$.

$$w_2 = a \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b \\ a \\ -a+2b \end{vmatrix}$$

$$g(v_1, w_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-b \\ a \\ -a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-b \\ a \\ -a+2b \end{vmatrix} =$$

$$= 2a - 2b + 3a + a - 2b = 6a - 4b = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b = 0$$

Una soluzione è data da $a=2$ $b=3$, cioè del

$$w_2 = 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Infine

$$g(v_1, v_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$\|v_1\|_g = \sqrt{6}$$

$$u_1 := \frac{v_1}{\sqrt{6}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$$

$$g(w_2, w_2) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = -1 + 6 + 16 = 21$$

$$\|w_2\|_g = \sqrt{21}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{21}} = \dots$$

u_1, u_2 è base ON di V risp. g .

ESERCIZIO 4

Equazioni parametriche per r :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + \sqrt{2}t \end{cases} \Rightarrow t = 1 - y \quad \begin{cases} x = 1 + 2(1 - y) \\ z = \sqrt{2}(1 - y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ \sqrt{2}y + z = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{eq. cartesiane per } r$$

Equazioni parametriche per s :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \Rightarrow t = x - 1 \quad \begin{cases} y = 2 + 2(x - 1) \\ z = 3 + 3(x - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

eq. cartesiane } $\uparrow$

r ed s sono rette sghembe.

(6)

Dalle loro equazioni parametriche si vede subito che hanno direzioni diverse. Calcolo rs mettendo a sistema le equazioni cartesiane di r con quelle di s . La matrice completa di tale sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & | & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & | & 1 \\ 0 & -5 & 0 & | & -6 \\ 0 & -6 & -1 & | & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & | & 1 \\ 0 & -5 & 0 & | & -6 \\ 0 & -1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & | & 1 \\ 0 & -5 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{2} & | & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}-2}{2} & | & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}}$$

incognita

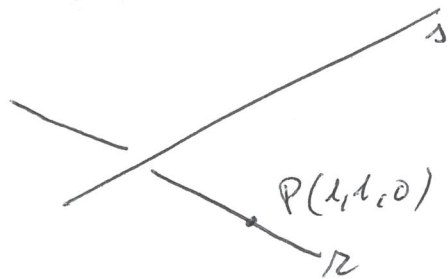
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & | & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{2} & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 + \frac{\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$-2 + \frac{\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}} = \frac{-10\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-9\sqrt{2}-2}{5\sqrt{2}} \neq 0$$

il S.L. è incompatibile

Quindi $rs = \emptyset$ e r, s sono sghembe.



α piano con $R \subset \alpha$

(7)

$\Rightarrow$ la direzione di R è
sottosp. vett. della giacitura
di α .

Sia (*) $ax + by + cz = 0$ ($a, b, c \neq (0, 0, 0)$) l'equazione
della giacitura di α . Allora per il vettore
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ verifica tale equazione, cioè

$$a \cdot 2 + b \cdot 1 + c \sqrt{2} = 0$$

$$2a + b + \sqrt{2}c = 0$$

$\alpha \parallel \beta \Rightarrow$ (*) è anche l'equazione della giacitura di β .

Per tanto un'altra soluzione di (*) è $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, che
genera la direzione di s . Dunque

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + b + \sqrt{2}c = 0 \end{cases}$$

una soluzione di quest
SL omogenea è data da

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2\sqrt{2} - 3, -\sqrt{2} + 6, -3)$$

Allora α, β hanno equazioni del tipo

$$(2\sqrt{2} - 3)x + (-\sqrt{2} + 6)y - 3z = d$$

Per determinare d nel caso di α , si impone
il passaggio per il punto $P(1, 1, 0)$ di r .

Analogamente si trova il d giusto per β .