Laurea Magistrale in Matematica

Università degli Studi di Trieste
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2 - A

Appello d'esame del 12 Luglio 2017

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. *(7 punti)* Sia $\mathbb{R}^{2\times 2}$ l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

(a) Si dimostri che l'insieme S delle matrici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che $\det(A) = \operatorname{tr}(A)$ è una sottovarietà liscia di $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Si consideri la mappa $F\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(A) = (\det(A) - \operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A)) .$$

Si dica se $(0, 0)$ è un valore regolare di F.

2. *(13 punti)* Sia C il cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Sia $P = (1, 0, 0) \in C$.

a) Si dimostri che $H^k_{\mathrm{dR}}(C \setminus \{P\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \\ \mathbb{R}^2, & k = 1 \\ \{0\}, & k \neq 0, 1 \end{cases}$.

b) Sia $i\colon C \setminus \{P\} \hookrightarrow C$ l'inclusione, e sia $\pi\colon C \to S^1$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, la proiezione sulla circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Sia $d\theta$ una forma di volume su S^1. Si dimostri che $\alpha := i^*(\pi^*(d\theta))$ è una 1-forma chiusa e che la sua classe di coomologia $[\alpha] \neq 0$.
(Suggerimento: si calcoli $\int_\gamma \alpha$, dove $\gamma = \{(x, y, 1) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$).

c) Si dica se $i^*(\chi^*(dz))$ è chiusa, rispettivamente esatta, dove $\chi\colon C \to \mathbb{R}$, $\chi(x, y, z) = z$.

3. *(13 punti)* Sia $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ lo spazio proiettivo reale e $[x_0 : x_1 : x_2]$ coordinate omogenee su di esso. Denotiamo con $U_i \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ l'aperto dove la i-esima coordinata omogenea non si annulla. Sia E il fibrato di rango uno su $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ il cui cociclo è dato dalle funzioni $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{R}^*, \alpha, \beta = 0, 1, 2\}$ definite come segue:

$$g_{\alpha\beta}([x_0 : x_1 : x_2]) = \left(\frac{x_\beta}{x_\alpha}\right)^2 .$$

a) Si dimostri che ogni polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili (x_0, x_1, x_2) definisce una sezione liscia del fibrato E.

b) Si dica se il fibrato E è triviale oppure no, motivando adeguatamente la risposta (*suggerimento: si utilizzi il punto precedente*).