ESERCIZIO 1.

(a) L'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ è definito dall'equazione:

$$S = \{ f(A) = 0 \},$$

dove $f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = xw - yz - x - w.$ $\quad \left(A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right)$

Identificando $\mathbb{R}^{2\times 2} \simeq \mathbb{R}^4$, scriviamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} w-1 \\ -z \\ -y \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

Il gradiente si annulla se e solo se

$$w = 1, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 1$$

cioè solo sulla matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dato che $f(A_0) \neq 0$, allora 0 è un valore regolare di f e conseguentemente S è una sotto varietà di $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Identificando ancora $\mathbb{R}^{2\times 2} \simeq \mathbb{R}^4$, scriviamo la matrice Jacobiana di F:

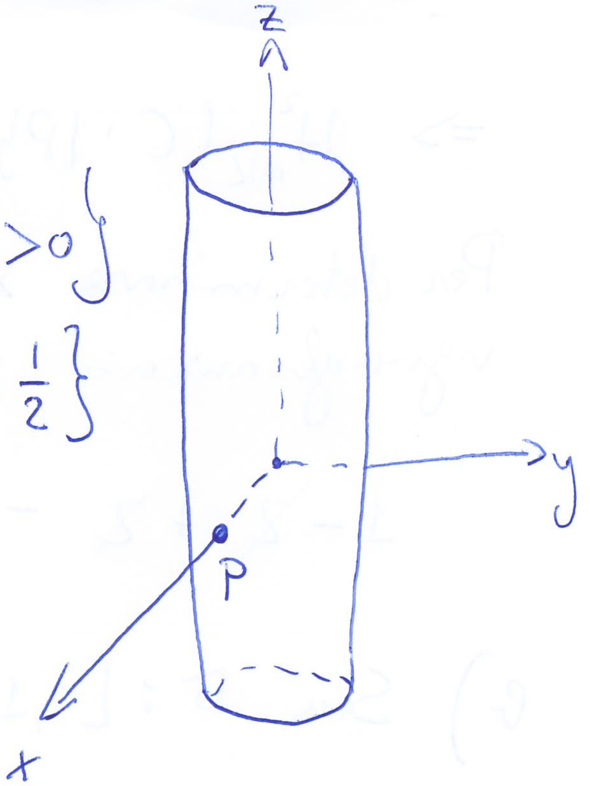
$$JF(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} w-1 & 1 \\ -z & 0 \\ -y & 0 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nel punto $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ lo Jacobiano di F ha rango uno. Dato che $F(A_1) = (0,0)$, allora $(0,0)$ non è un valore regolare di F.

2. a)

$$U := (C \setminus \{P\}) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$$

$$V := C \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < \tfrac{1}{2}\}$$



Allora:

$$C \setminus \{P\} = U \cup V,$$

inoltre

$$U \underset{h}{\simeq} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$V \underset{h}{\simeq} \mathbb{R}^2, \quad U \cap V \underset{h}{\simeq} \{(0,1,0),(0,-1,0)\}$$

Applichiamo Mayer-Vietoris:

$$0 \to \underset{\underset{\mathbb{R}}{\|}}{H^0_{dR}(C \setminus \{P\})} \to \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\|}}{H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V)} \to \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\|}}{H^0_{dR}(U \cap V)} \to$$

$C \setminus \{P\}$ è connesso

$$\to \overset{\overset{\mathbb{R}^x}{\|}}{H^1_{dR}(C \setminus \{P\})} \to \overset{\overset{\mathbb{R}}{\|}}{H^1_{dR}(U)} \oplus H^1_{dR}(V) \to \overset{\overset{\{0\}}{\|}}{H^1_{dR}(U \cap V)} \to$$

$$\to H^2_{dR}(C \setminus \{P\}) \to \overset{\overset{\{0\}}{\|}}{H^2_{dR}(U) \oplus H^2_{dR}(V)} \to \overset{\overset{\{0\}}{\|}}{H^2_{dR}(U \cap V)} \to 0$$

perché $\dim(C \setminus \{P\}) = 2$

$$\Rightarrow \quad H^2_{dR}(C\setminus\{P\}) \cong \{0\}$$

Per determinare x usiamo la seguente uguaglianza:

$$1 - \cancel{2} + \cancel{2} - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

b) Sia $\sigma : [0,1] \to C\setminus\{P\}$

$$\sigma(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), 1)$$

σ è un 1-simplesso in $C\setminus\{P\}$,

$$\partial\sigma = 0$$

$$\int_\sigma \alpha = \int_{S^1} d\vartheta \neq 0$$ perché $d\vartheta$ è una forma di volume su S^1.

$$\Rightarrow \quad [\alpha] \neq 0.$$

α è chiusa perché

$$d\alpha = d\, i^*(\pi^*(d\vartheta)) = i^*\pi^*\big(\underbrace{d(d\vartheta)}_{=0}\big) = 0$$

dim $S^1 = 1$
e le 2-forme su S^1 sono 0

c) $d\, i^*(\chi^*(dz)) = i^*(\chi^*(d^2 z)) = i^*\chi^*(0) = 0.$

$i^*\chi^*(dz) = d(i^*\chi^*(z)) \Rightarrow i^*\chi^*(dz)$

è esatta.

ESERCIZIO 3.

(a) si osservi che la famiglia $\{g_{\alpha\beta}\}$ soddisfa effettivamente la condizione di cociclo:

$$([x] = [x_0, x_1, x_2])$$

$$g_{\alpha\alpha}([x]) = 1$$

$$g_{\alpha\beta}([x]) \cdot g_{\beta\gamma}([x]) = \left(\frac{x_\beta}{x_\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{x_\gamma}{x_\beta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x_\gamma}{x_\alpha}\right)^2$$

$$= g_{\alpha\gamma}([x]).$$

pertanto E si ottiene come lo spazio quoziente:

$$E = \coprod_{\alpha=0,1,2} U_\alpha \times \mathbb{R} \Big/ \sim$$

dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza (ben posta dato che le condizioni di cociclo sono verificate)

$$\underset{U_\alpha \times \mathbb{R}}{\underset{\cap}{([x], t)}} \sim \underset{U_\beta \times \mathbb{R}}{\underset{\cap}{([y], s)}}$$ se e solo se

1. $[x] = [y]$ $(\Rightarrow [y] \in U_\alpha \cap U_\beta)$ e
2. $t = g_{\alpha\beta}([y])\, s$.

Pertanto una famiglia di sezioni locali

$$\sigma_\alpha([x]) = ([x], s_\alpha([x])).$$

incollano ad una sezione globale di E se e solo se:

$$(*). \quad \sigma_\alpha([x]) = ([x], g_{\alpha\beta}([x])\, s_\beta([x])).$$

Consideriamo ora, dato un polinomio $p \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]_{(2)}$ la famiglia di sezioni locali

$$\sigma_\alpha([x]) = \left([x], p\left(\frac{x}{x_\alpha}\right)\right).$$

Dato che p è omogeneo di grado 2 si ha

$$p\left(\frac{x}{x_\alpha}\right) = p\left(\frac{x}{x_\alpha} \cdot \frac{x_\beta}{x_\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{x_\beta}{x_\alpha}\right)^2 p\left(\frac{x}{x_\beta}\right)$$

$$= g_{\alpha\beta}([x]) \cdot p\left(\frac{x}{x_\beta}\right)$$

il che implica:

$$\sigma_\alpha([x]) = ([x], g_{\alpha\beta}([x])\, s_\beta([x])).$$

e p definisce una sezione σ_p globale di E.

(b) Consideriamo il polinomio $q(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

Allora la sezione globale $\sigma_q : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow E$

(definita come sopra) non si annulla mai.

Pertanto E ha una sezione liscia ovunque non nulla ed è triviale.