

ESERCIZIO 1

$\text{Ker}(L_A)$ si identifica con lo spazio di tutte le soluzioni del sist. lineare omogeneo

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad (*) \begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ 3x + 7z = 0 \end{cases}$$

Applico l'algoritmo di Gauss alla matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il S.L. omogeneo (*) è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $\text{Ker}(L_A) = \{0\}$ e, pertanto, L_A è iniettiva.

Inoltre:

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{\dim(\text{Ker}(L_A))}_{=0} + \dim(\text{Im}(L_A)) \Rightarrow$$

$$\dim(\text{Im}(L_A)) = 3.$$

$$L_A \text{ è generata dai vettori } L_A(e_1) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad L_A(e_2) = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad L_A(e_3) = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Quindi questi 3 vettori sono linearmente indipendenti ed, allora, formano una base di $\text{Im}(L_A)$

Una base di $\text{Ker}(L_A)$ è formata dall'insieme vuoto. Poiché $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 > 3 = \dim(\text{Im}(L_A))$, L_A non è suriettiva.

Scrivi r in equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a - 2y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi il punto generico di r è $(a - 2y, y, 0)$.

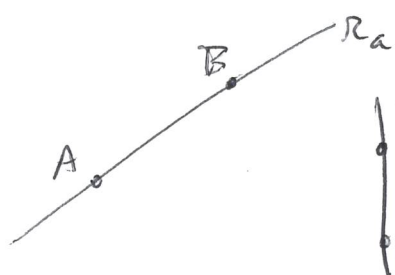
Il generico piano passante per s ha equazione cartesiana

$$\lambda(x - y - 1) + \mu(2x + z - 1) = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Cerco se esistono dei particolari valori di a , λ, μ per i quali $R_a \subset \pi_{(\lambda, \mu)}$, cioè

$$\lambda(a - 2y - y - 1) + \mu(2(a - 2y) + 0 - 1) = 0 \quad \text{è soddisfatta per ogni } y \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda + 2\mu)a + (-3\lambda - 4\mu)y - \lambda - \mu = 0$$



due punti distinti di R_a sono

$$A(a, 0, 0) \quad B(a - 2, 1, 0)$$

due punti distinti di s sono

$$C(0, -1, 1) \quad D(1, 0, -1)$$

R_a ed s sono complanari se e solo se i tre vettori

$$\vec{DA} = A - D = (a - 1, 0, 1) \quad \vec{DB} = B - D = (a - 3, 1, 1)$$

e $\vec{DC} = C - D = (-1, -1, 2)$ sono linearmente dipendenti.

$$\Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a-3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a-3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ a-3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(a-1) - (a-3) + 1 + a - 1 =$$

$$= 2a - 2 - a + 3 + 1 + a - 1 = 2a + 1 = 0$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

Tutte le rette r_a sono parallele tra di loro ed hanno direzione generata da $\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

La direzione di s è generata da: $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$

Quindi $r_{-\frac{1}{2}}$ ed s non sono parallele, dunque sono incidenti.

ESERCIZIO 3

La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A è simmetrica. Poiché la base canonica è ON risp. al prodotto scalare standard, f è autoaggiunto.

$$p_f(t) = -t^3 + 5t^2 = -t(t^2 - 5) = -t(t - \sqrt{5})(t + \sqrt{5}) \quad \text{tutte le mult. alg. sono } = 1.$$

$$\lambda = 0 \quad \text{Aut}_0 = \text{Ker}(f) = \text{span}\left(e_1 - 2e_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}\right)$$

← un autovettore

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{5}$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

è un vettore

$$\lambda = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} 2y = \sqrt{5}x \\ 2x+z = \sqrt{5}y \\ y = \sqrt{5}z \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & -\sqrt{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\sqrt{5}x = 2y = 2\sqrt{5}z \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_2\| = \sqrt{10}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\sqrt{10}} \quad \text{è un vettore}$$

$$\lambda = -\sqrt{5} \quad \begin{cases} 2y = -\sqrt{5}x \\ y = -\sqrt{5}z \end{cases} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_3\| = \sqrt{10} \quad u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{10}}$$

u_1, u_2, u_3 sono tre vettori; poiché sono relativi ad autovalori distinti, sono a due a due ortogonali tra loro. Quindi u_1, u_2, u_3 è una base ON di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza f . La indichiamo con B

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 4

$\text{Im}(L_A)$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A . Indichiamo tali colonne con C_1, C_2, C_3, C_4

$$C_3 - C_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = -2(C_3 - C_4) + 5 \frac{1}{2} C_4 = -2C_3 + (2 + \frac{5}{2})C_4$$

Analogamente si vede che $C_1 \notin \text{Span}(C_3, C_4)$

Quindi C_1, C_3, C_4 sono linearmente indipendenti.
Quindi formano una base B di $\mathbb{R}^3$.

Per il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare esiste, allora, ed è unica un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(C_1) = e_1 \quad f(C_3) = e_3 \quad f(C_4) = e_4 \quad \text{da cui}$$

$$(L_A \circ f)(C_1) = L_A(e_1) = C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{L_A \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}}$$

$$(L_A \circ f)(C_3) = L_A(e_3) = C_3$$

$$(L_A \circ f)(C_4) = L_A(e_4) = C_4$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^4 \\ B & & B_C \end{array}$$

$$M_{B_C}^B(f) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & e_4 \end{array} \right]_{\substack{f(C_1) \quad f(C_3) \quad f(C_4)}}$$

$$\text{In } B = M_{B_C}^{B'}(f)$$

$$\text{Se } P = M_B^{B'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}), \text{ allora}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right]$$

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

B_C' indica la base canonica di $\mathbb{R}^3$

Calcolo $P = (P^{-1})^{-1}$. Quindi:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -6 & 7 \end{array} \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

e $f = L_B$

~~B non è invertibile~~

Allora

$$L_{AB} = L_A \circ L_B = L_A \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3} = L_{I_3} \Rightarrow \underline{AB = I_3}$$

B non è una matrice invertibile perché non è una matrice quadrata.

Per trovare B si è usato essenzialmente il fatto che $\text{rg}(A) = 3$.