LEZIONE 1 ~~18~~/9/~~17~~

tel.
DARIO PORTELLI 040 558 2647 porteda@units.it

orario di ricevimento: MERCOLEDÌ 14-15 (o ~~GIOVEDÌ~~?)

leggere le modalità d'esame.

TESTI - M. Abate - C. De Fabritiis "GEOM. ANALITICA" McGROW-HILL (+ testo di esercizi)

- F. Bottacin "ALGEBRA LIN"

- Kemeny e altri "MATEMATICA e ATTIVITÀ UMANE" Vol. II

NUMERI

ALFABETO GRECO

Useremo quasi sempre i numeri reali. Verso la fine del corso useremo i numeri complessi in alcuni punti delicati.

$\mathbb{R}$: l'insieme di tutti i numeri reali

Le proprietà principali di $\mathbb{R}$ sono

ci sono due operazioni in : $\mathbb{R}$ $+$ $\cdot$

cioè : $\underbrace{\text{presi comunque due numeri reali } a, b}_{\text{"} \forall a, b \in \mathbb{R} \text{"}}$

ad essi posso associare due "nuovi" numeri reali

$a+b$ la somma di a, b

$a \cdot b$ il prodotto di a, b

quel che ci interessa sono le proprietà di tali operazioni:

- l'addizione $+$ è associativa

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $\boxed{a+(b+c)=(a+b)+c}$

- l'addizione ha un elemento neutro : lo zero, 0

$a+0=a=0+a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ALFABETO GRECO (non è completo)

α	ALFA	φ	FI	ψ	PSI
β	BETA	λ	LAMBDA	σ	SIGMA
γ	GAMMA	μ	MI	τ	TAU
δ	DELTA	ν	NI	ω	OMEGA
ε	EPSILON	π	PI		
η	ETA	ρ	RO		

4.– Data la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

si determini una matrice B, di tipo 4×3, tale che $AB = I_3$. (Suggerimento: si ragioni sull'applicazione lineare L_A).
La matrice B è invertibile?
Quale proprietà della matrice A è stata usata per costruire B?

PASSARE IN BIBLIOTECA LUNEDI

- per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste l'elemento opposto "$-a$"

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

- l'addizione è commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ vale

$$\boxed{a+b=b+a}$$

- la moltiplicazione è associativa:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $\boxed{a(bc)=(ab)c}$

- la moltiplicazione ha elemento neutro: l'uno, 1

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

- per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{a \neq 0}$ esiste l'elemento inverso a^{-1} oppure $\frac{1}{a}$, tale che

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

- la moltiplicazione è commutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{ab=ba}$$

Infine, queste due operazioni sono legate tra loro dalla

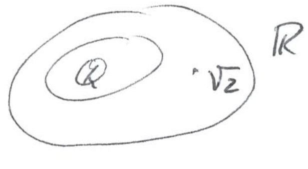
- proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

Il 98% di quel che faremo dipende solo da queste proprietà. Osserviamo che

$\mathbb{Q}$: l'insieme di tutti i numeri razionali.

$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$



L'addizione e la moltiplic. in $\mathbb{Q}$ verificano le stesse proprietà

Una conseguenza (ci servirà)

Legge di annullamento del prodotto

se $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che $ab=0$, allora $a=0$ oppure $b=0$.

IPOTESI (quello che si suppone)

TESI (quello che si dimostra)

Dim.

Consideriamo a. Abbiamo due possibilità: o $a=0$ oppure $a\neq 0$.

Se $a=0$ abbiamo già ottenuto la tesi.

Se $a\neq 0$, allora esiste a^{-1}. In tal caso

$$ab=0 \underset{\text{SPIEG.}}{\Longrightarrow} a^{-1}(ab) = a^{-1}\cdot 0 = 0$$

~~si può dimostrare~~ ... come abbiamo visto

Allora $0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)\cdot b = 1\cdot b = b$, $b=0$ ∎

Osserviamo che non è mai entrato in ballo nel ragionamento precedente che cosa siano effettivamente i numeri reali. Abbiamo usato solo le proprietà delle loro operazioni.

~ o ~

$$\boxed{a\cdot 0 = 0 \qquad \forall a\in\mathbb{R}}$$

$a = a\cdot 1 = a\cdot(1+0) = a\cdot 1 + a\cdot 0 = a + a\cdot 0$

cioè $a + \underbrace{a\cdot 0}_{?} = a \underset{\text{"QUINDI"}}{\Longrightarrow} a\cdot 0 = a - a = 0$

NUMERI COMPLESSI

Presentazione euristica

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ insieme dei num. naturali.

Si possono **sempre** addizionare due n. naturali.

MA $7 - 31$ non si può fare in $\mathbb{N}$

L'idea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ insieme dei n. interi

Se penso 7 e 31 come elementi di $\mathbb{Z}$, allora

$7 - 31 = -24 \in \mathbb{Z}$, cioè si può sottrarre 31 da 7 in $\mathbb{Z}$

b) Si possono **sempre** moltiplicare due n. interi

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \qquad a \cdot b \in \mathbb{Z}$ SPIEG.

MA $7 : 31$ non si può fare (nemmeno) in $\mathbb{Z}$

L'idea $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ insieme dei n. razionali

$\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni, tanto per capirci.

Se pensiamo 7 e 31 come elementi di $\mathbb{Q}$, allora

$7 : 31 = \frac{7}{31} \in \mathbb{Q}$ cioè si può dividere 7 per 31 in $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ il perché di questo ampliamento lo vedremo in Analisi (specialmente ...)

~o~

Che cosa non si può fare coi numeri reali?

$x^2 + x + 1 = 0$ una tranquilla equazione.

$\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$

L'idea $-3 = 3 \cdot (-1) \qquad \sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ che non esiste, nel senso che: non è in $\mathbb{R}$

Facciamo finta di niente ed andiamo avanti.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} = \eta \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} \end{cases}$$

sono "soluzioni" della nostra equaz.?

VERIFICO:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right) + 1 =$$

$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$$= \frac{1}{4} - \cancel{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}\sqrt{-1} + \frac{3}{4}\left(\sqrt{-1}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0 \;!!!$$

$$\mathbb{C} \stackrel{def}{=} \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\boxed{i^2 = -1}$ Per ora, i solo un simbolo....

insieme dei numeri complessi.

$$\mathbb{C} \ni a + ib \longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

coppia ordinata

corrispondenza biunivoca: è un'applicazione iniettiva e suriettiva, quindi biettiva.

$i \in \mathbb{C} \quad a = 0,\ b = 1 \qquad i \longleftrightarrow (0,1) \in \mathbb{R}^2$

SPIEGARE

e questo è qualcosa di concreto, non più un simbolo.

$(a+ib), (c+id) \in \mathbb{C}$ qualsiasi

$$\underbrace{(a+ib)}_{\text{simb.}} + \underbrace{(c+id)}_{\text{simb.}} \stackrel{def}{=} \underbrace{(a+c)}_{\text{in } \mathbb{R}} + i\,\underbrace{(b+d)}_{\text{in } \mathbb{R}}$$

tolgo le parentesi, rimeno un po', raccolgo la i

$$(a,b) \underset{\text{in } \mathbb{C}}{+} (c,d) = (a+c, b+d)$$

INTERPR. GEOMETRICA: la regola del parallelogramma

dati due qualsiasi n. complessi, posso costruire a partire da essi un nuovo numero complesso.

addizione di n. complessi

Questa addizione in $\mathbb{C}$ è associativa e commutativa

Esiste l'elemento neutro $0_{\mathbb{C}} = (0,0) = 0 + 0 \cdot i$

Esiste l'opposto di $z = a+ib$ $\quad -z = (-a) + i(-b)$.

MOLTIPLICAZIONE di num. complessi

$a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$ qualsiasi

$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd =$

vado sciolto, immaginando che valgano tutte le proprietà che mi servono
formali

$= \underline{(ac-bd) + i(ad+bc)}$

si può dare questa regola come definizione di una molt. in $\mathbb{R}^2$

Esempio

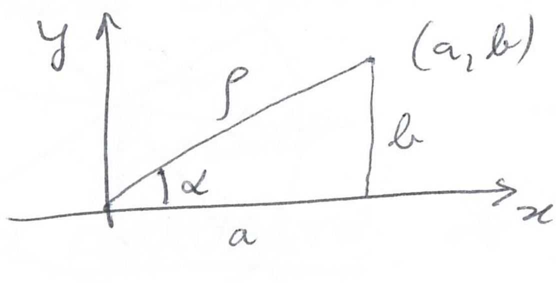
$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0)$?

$$\boxed{(a,b)\cdot(c,d) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{(ac-bd,\ ad+bc)}_{}}$$

non si capisce che cosa sta succedendo ...

Scrittura trigonometrica dei num. complessi.

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$



$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ è detto modulo del num. complesso $a+ib$.

$a = \rho \cos(\alpha)$

$b = \rho\ \mathrm{sen}(\alpha)$

Se $0 \leq \alpha < 2\pi$, α è detto l'argomento (principale) di $a+ib$. $\Longrightarrow$

18/9/17

$c+id \in \mathbb{C}$ ha modulo $r = \sqrt{c^2+d^2}$ ed

__Argomento__ β dunque

$c = r\cos(\beta)$ $\qquad$ $d = r\,\mathrm{sen}(\beta)$.

$c+id = \underbrace{r(\cos(\beta)+i\,\mathrm{sen}(\beta))}_{\in \mathbb{C},\ \text{di modulo } 1}$

Allora

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc) =$

$= \big(\rho r(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)),\ \rho r(\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta))\big)$

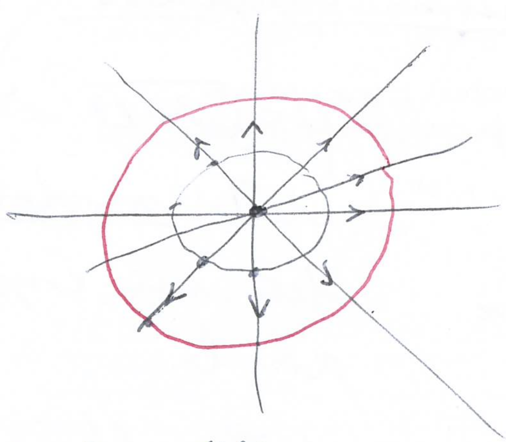
$= \big(\rho r\cos(\alpha+\beta),\ \rho r\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\big)$

__ATTENZIONE:__ potrebbe essere $\alpha+\beta \geq 2\pi$!!! In tal caso

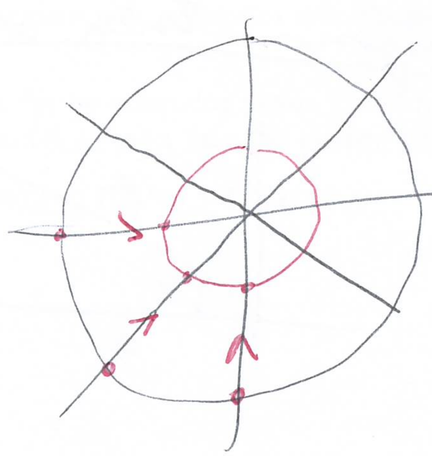
Che cosa significa __geometricamente__ moltiplicare un qualsiasi numero complesso $w = c+id$ per un fissato numero complesso $z = a+ib$, di modulo ρ ed Argomento α ?

__Per ottenere il risultato:__

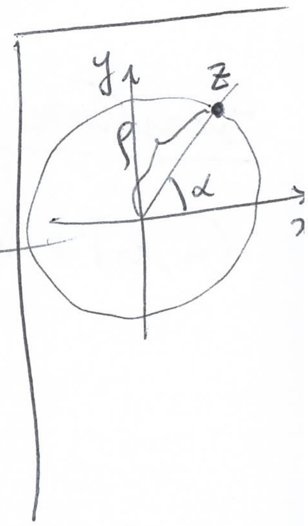
- si moltiplica il modulo di w per ρ (quindi si ha un effetto di "zoom"):



$\rho = 2$, per esempio $\rho > 1$



$\rho = \frac{1}{3} < 1$



<u>QUINDI</u>: prima zoomo, poi ruoto

<u>18/9/17</u> (8)

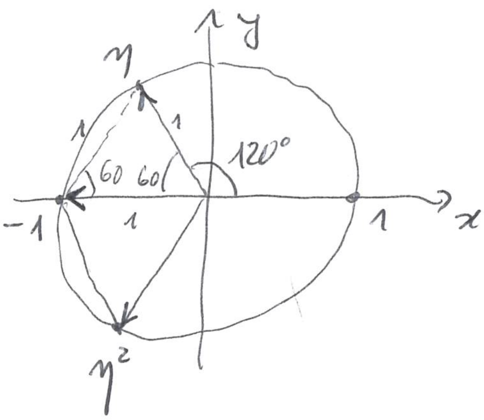
- si aggiunge α all'argomento (mettendo a posto le cose se $\alpha+\beta \geq 2\pi$)

<u>ESEMPI</u>

"il modulo di η"

$$\eta = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad |\eta| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

$$\alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$$



$\eta^2 = ?$ $\qquad |\eta^2| = 1^2 = 1$

L'argomento di η^2 è

$2 \cdot 120° = 240°$

$\eta^2+\eta = ?$ $\qquad \eta^2+\eta = -1$

$\Rightarrow \eta^2+\eta+1 = 0$

La moltiplicazione in $\mathbb{C}$ è

- commutativa
- associativa
- esiste elemento neutro $1 = 1+i\cdot 0$

Vale la proprietà distributiva risp. alla ~~prod~~ somma

$z = a+ib \in \mathbb{C}$ fissato

$\bar{z} \overset{def}{=} a-ib$ il <u>CONIUGATO</u> di z

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2+i(\cancel{-ab+ab})$$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2 \qquad z \neq 0 \iff |z| > 0$