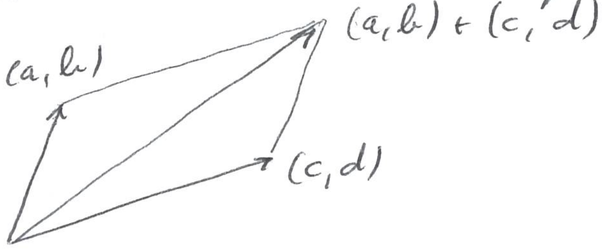
# LEZIONE 2

Ieri: iniziato a studiare i numeri complessi, $\mathbb{C}$

Nel modo più concreto possibile:

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ come insieme  SPIEG.
- ADDIZIONE $\boxed{(a,b)+(c,d) \overset{\text{def}}{=} (a+c,\, b+d)}$

Geometricamente corrisponde alla "regola del parallelogramma".




Proprietà dell'addizione:

- $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ qualsiasi

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(c+e,\, d+f) =$$

$$= (\underbrace{a+[c+e]}, \underbrace{b+[d+f]}) = ([a+c]+e,\, [b+d]+f) =$$

qui sono in $\mathbb{R}$, "+" indica la solita addizione di n. reali, che gode della proprietà associativa. Allora

$$= (a+c,\, b+d)+(e,f) = [(a,b)+(c,d)]+(e,f)$$

Pertanto: l'addizione in $\mathbb{C}$ è associativa

In modo analogo si verifica che tale addizione

- è commutativa
- ha elemento neutro, è $(0,0)$, cioè $0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$
- ogni $(a,b) \in \mathbb{C}$ ha opposto $(-a,-b)$: $(a,b)+(-a,-b) = (0,0) = 0_{\mathbb{C}}$

} a loro per esercizio

• MOLTIPLICAZIONE per ogni $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$

1) $\boxed{(a,b)\cdot(c,d) \overset{def}{=} (ac-bd,\ ad+bc)}$ ricordare come ce la siamo sognata.

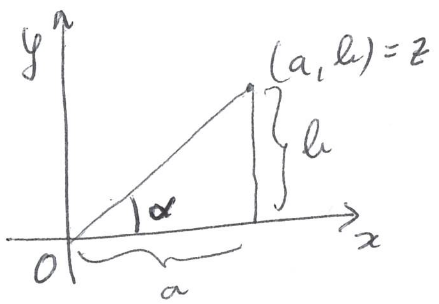
→ Per niente intuitiva. Per capirla scriviamo i numeri complessi in

• FORMA TRIGONOMETRICA

$z = a + ib = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ : n. complesso scritto in f. CARTESIANA

- coefficiente dell'immaginario
- unità immaginaria ($i^2 = -1$; $i \notin \mathbb{R}$)
- parte reale

} nomenclatura




$|z| \overset{def}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$ è detto modulo di $z \in \mathbb{C}$

$|z| = 0_{\mathbb{R}} \iff z = 0_{\mathbb{C}}$

Se $z \neq 0$ è univocamente determinato un angolo $\alpha$ con $0 \leq \alpha < 2\pi$ ($0° \leq \alpha < 360°$)

$\alpha$ è detto l'Argomento principale di $z$

$\mathbb{C} \ni z$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ $\quad z \longleftrightarrow (\rho = |z|, \alpha)$ ← forma TRIGON. di $z$

$a = \rho\cos(\alpha)$ $\quad b = \rho\ \text{sen}(\alpha)$ $\quad$ Allora

$$z = (\rho\cos(\alpha), \rho\ \text{sen}(\alpha)) = \underbrace{\rho(\cos(\alpha) + i\ \text{sen}(\alpha))}_{\text{è più espressivo}}$$

NB $|\cos(\alpha) + i\ \text{sen}(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)} = \sqrt{1} = 1$

ESERCIZIO Dalla (1) segue che

a) $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)(a,b)$, cioè la molt. in $\mathbb{C}$ è commut.

b) $(a,b)\cdot 0_{\mathbb{C}} = (0,0) = 0_{\mathbb{C}}$

$z, w \in \mathbb{C}$ entrambi $\neq 0_{\mathbb{C}}$ $\qquad w=(r,\beta)$

$z=(a,b)=a+ib \quad z(\rho,\alpha) \quad w=(c,d)=c+id$

Allora abbiamo "tradotto" la (1) nella

FORMULA di DE MOIVRE (leggi "de ~~moivre~~ MUAVR")

(2) $$\boxed{(\rho,\alpha)\cdot(r,\beta)=(\rho r,\ \alpha+\beta)}$$

[Abbiamo visto ieri il significato geometrico di questa formula

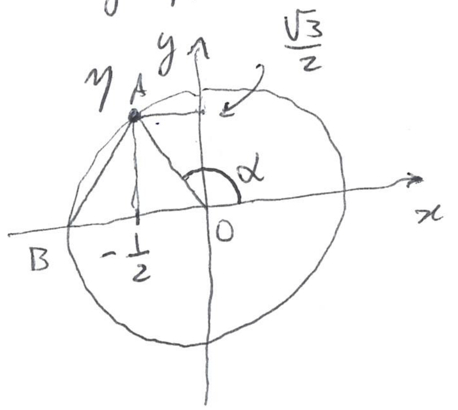
ATTENZIONE: potrebbe benissimo capitare che $\alpha+\beta \geq 2\pi$. In tal caso l'Argomento di $z\cdot w$ è $\alpha+\beta-2\pi$. ($\alpha<2\pi,\ \beta<2\pi \Rightarrow \alpha+\beta<4\pi \Rightarrow \alpha+\beta-2\pi<2\pi$)

$$(2) \Longrightarrow \boxed{|z\cdot w| = |z|\cdot|w|} \quad (3)$$

ESEMPIO

$\eta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C} \qquad |\eta| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\mathrm{Arg}(\eta) = ?$



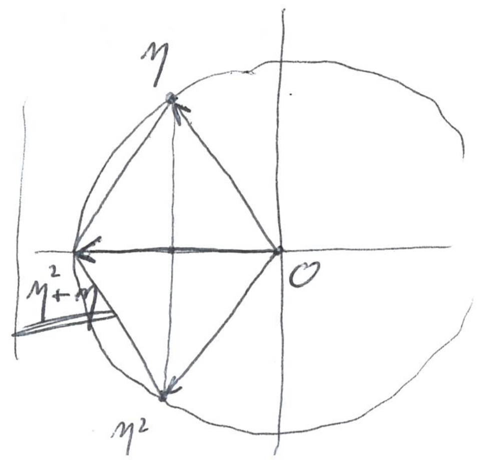

$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2} \qquad \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

OAB è triangolo isoscele: $\overline{OA} = \overline{BA}$
(SPIEG) $\Rightarrow \overline{AB} = 1 \Rightarrow$ OAB è tr. equilatero. Allora $180° - \alpha = 60°$
$\Rightarrow \alpha = 120° \qquad \mathrm{Arg}(\eta) = 120° = \frac{2\pi}{3}$

$\eta^2 = (1\cdot 1,\ 2\cdot 120°) = (1,\ 240°)$

$\eta^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\eta^2 + \eta = -\frac{1}{2} - \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2} + \cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -1$



Anche $\eta^2$ è soluzione di $X^2+X+1=0$

---

CONSEGUENZE di (2)

La moltiplicazione tra numeri complessi è

- commutativa perché in $\mathbb{R}$ $\rho r = r\rho$ e $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- associativa A LORO
- esiste elemento neutro $1_{\mathbb{C}} = (\underset{\text{modulo}}{1_{\mathbb{R}}}, \underset{\text{argomento}}{0_{\mathbb{R}}})$

  In questo caso la forma cartesiana coincide con quella trigonometrica.

- Sia $z=(\rho,\alpha)$ $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ cioè $\rho>0$

  Considero il numero complesso così definito

$$w = \begin{cases} (\rho^{-1}, 2\pi - \alpha) & \text{se } \alpha>0 \\ (\rho^{-1}, 0) & \text{se } \alpha=0 \end{cases}$$

si verifica facilmente che allora $0 < 2\pi - \alpha < 2\pi$

Allora $zw = 1_{\mathbb{C}}$ cioè $w = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

~ o ~

Con un conticcio senza poesia si verifica, infine che vale anche la proprietà distributiva in $\mathbb{C}$.

Quindi le due operazioni in $\mathbb{C}$ + e · hanno le stesse proprietà delle due operazioni in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (e anche $\mathbb{Q}$) sono CAMPI

Considero tutti i numeri complessi con il coeff. dell'immaginario nullo

$(a,0) \quad a \in \mathbb{R}$ corrispondenza biunivoca

$\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \mathbb{R} \qquad (a,0) \longleftrightarrow a$

$$(a,0)+(c,0) = (a+c, 0+0) = (a+c, 0)$$

In sostanza è come aver fatto l'addizione direttamente in $\mathbb{R}$.

Che cosa succede per la moltiplicazione?

Basta sostituire nella formula (1) $\underline{c=d=0}$

$$(a,0)\cdot(c,0) = (ac - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot c) = (ac, 0)$$

Quindi possiamo pensare di avere "dentro" $\mathbb{C}$ una copia di $\mathbb{R}$.

Se usiamo i n. complessi scritti in forma cartesiana "sciolta" $a+ib$ ; $a,b \in \mathbb{R}$, allora se $b=0$ $\quad a+i\cdot 0 = a \in \mathbb{R}$ è tutto molto naturale.

D'ora in poi penseremo

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le operazioni in $\mathbb{C}$ inducono su $\mathbb{R}$ ($\subset \mathbb{C}$) le solite operazioni coi reali.

ESEMPIO

$\eta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\eta = (1, 120°)$

$\eta^2 = (1^2, 2\cdot 120°) = (1, 240°)$ $\eta^3 = (1, 360°) = (1, 0°) = 1$

$(\eta^2)^2 = (1^2, 2\cdot 240°) = (1, 480°) = (1, 120°) = \eta$

$(\eta^2)^3 = (\eta^2)^2 \cdot \eta^2 = \eta\cdot\eta^2 = \eta^3 = 1$

$(X^2+X+1)(X-1) = X^3 \cancel{+X^2} \cancel{+X} \cancel{-X^2} \cancel{-X} - 1 = X^3 - 1$

L'equazione polinomiale $X^3 - 1 = 0$ ha le tre radici $1, \eta, \eta^2$ in $\mathbb{C}$

In $\mathbb{R}$ trovo la sola radice 1.

$X-1, \; X-\eta, \; X-\eta^2$

polinomi a coeff. in $\mathbb{C}$

$(X-1)(X-\eta)(X-\eta^2) = (X-1)(X^2 - \eta^2 X - \eta X + \underbrace{\eta^3}_{=1}) =$

$= (X-1)(X^2 + \underbrace{(-\eta^2-\eta)}_{=1} X + 1) = (X-1)(X^2+X+1) = X^3 - 1$

perché $\eta^2 + \eta = -1$ già visto

Si riesce a fattorizzare il polinomio $X^3 - 1$ in prodotto di polinomi di grado 1 se si permette che questi polinomi siano del tipo $X - z$ con $z \in \mathbb{C}$

---

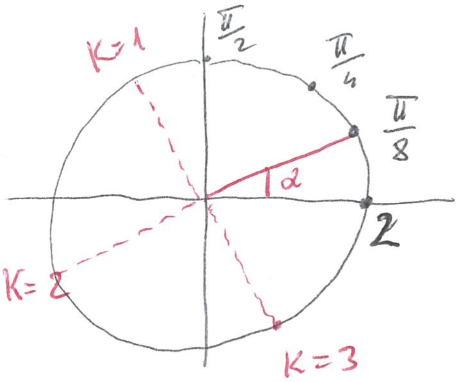
ESERCIZIO Trovare tutti i numeri complessi $z$ che verificano $z^4 = 16i$

$|16i| = \sqrt{16^2} = 16 \qquad \operatorname{Arg}(16i) = \frac{\pi}{2}$ o $90°$

$z = (\rho, \alpha) \Rightarrow z^4 = (\rho^4, 4\alpha) = (16, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \rho^4 = 16 \quad \underline{\rho = 2}$

$4\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{\pi}{8}}$

$z = (2, \frac{\pi}{8})$ funziona




C'è qualche altro angolo $\alpha$ che funziona?
Facciamo finta di <u>sì</u> (in realtà: SUPPONIAMO)
Scrivo tale angolo in questo modo $\alpha + \beta$. Deve essere

$0 \leq \alpha + \beta < 2\pi$ e $4(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2}$ !!!

$4(\alpha+\beta) = \underbrace{4\alpha}_{\frac{\pi}{2}} + 4\beta = \frac{\pi}{2} + 4\beta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \underline{4\beta = 0}$ !!!!!!

Cioè $4\beta$ è un multiplo di $2\pi$ : $4\beta = K\, 2\pi$

$\Longrightarrow \underline{\beta = K \frac{\pi}{2}}$ Allora per $\underline{K = 1, 2, 3}$ vale

la condizione $0 \leq \alpha + \beta = \alpha + K\frac{\pi}{2} < 2\pi$

$z_2 = (2, \frac{5}{8}\pi) \qquad z_3 = (2, \frac{9}{8}\pi) \qquad z_4 = (2, \frac{13}{8}\pi)$

sono con $z = z_1$ tutti e soli i numeri complessi che verificano la condizione $z^4 = 16i$

$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \qquad z_2 = 2\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = i z_1$

$z_3 = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = -z_1 \qquad z_4 = 2(\qquad) = -i z_1$

$$(X - z_1)(X + z_1)(X - i z_1)(X + i z_1) =$$

$$= (X^2 - z_1^2)(X^2 + z_1^2) = X^4 - z_1^4 = X^4 - 16 i$$

$$(X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = X^4 - 1$$