POLINOMI

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \_\_ + a_1 X + a_0 \qquad a_n, a_{n-1}, \_\_, a_0 \in \mathbb{R}$$

è un polinomio a coeff. n. reali.

$a_n, a_{n-1}, \text{---}, a_1, a_0$ sono i suoi coefficienti.

Se $a_n \neq 0$ allora si dice che f ha grado n $\quad \partial(f) = n$

X : l'indeterminata.

Se $g = b_m X^m + \_\_ + b_1 X + b_0$ è un altro polinomio a coeff. reali, allora $f = g \iff$ ("se e solo se")

$$a_0 = b_0 \quad a_1 = b_1 \quad \text{---} \quad a_n = b_n \quad a_{n+1} = b_{n+1} \text{ ---}$$

SPIEGARE

Si considera anche il polinomio nullo: tutti i suoi coeff. sono nulli.

$a_1 X + a_0$ ha grado 1 sse $a_1 \neq 0$

a_0 ha grado 0 sse $a_0 \neq 0$

Il polinomio nullo non ha alcun grado.

I polinomi si possono sommare e moltiplicare tra di loro (lo sappiamo fare).

Si può fare anche la divisione col resto.

ESEMPIO

$$
\begin{array}{l|l}
2X^3 - 5X^2 + X - 8 : & X^2 + X - 1 \\
\hline
2X^3 + 2X^2 - 2X & 2X - 7 \quad \text{QUOZIENTE} \\
\hline
\quad -7X^2 + 3X - 8 & \text{RESTO} \\
\quad -7X^2 - 7X + 7 & \\
\hline
\quad\quad 10X - 15 &
\end{array}
$$

non posso più andare avanti per motivi di grado

Formalizziamo le cose così:
dati due polinomi f, g con $g \neq 0$, allora esistono altri due polinomi q, r tali che

$$f = qg + r \quad \text{e} \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad \partial(r) < \partial(g)$$

q è detto quoziente, r è detto resto.
q, r sono unici (non è difficile vederlo)

$\alpha \in \mathbb{R}$ è detto radice di f se

$$f(\alpha) = \underbrace{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0}_{\text{sono tutte operazioni in } \mathbb{R}} = 0 \qquad (\star)$$

Osservazione
Tutto quanto detto finora continua a valere se, invece che prendere i coefficienti sempre in $\mathbb{R}$, li prendiamo in $\mathbb{Q}$, oppure in $\mathbb{C}$.

Possiamo anche considerare un $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Quindi il conto in $(\star)$ si può pensare come un conto in $\mathbb{C}$.

Questo ci sarà utilissimo. Ad esempio X^2+1 ha tutti i coeff. in $\mathbb{R}$. Ma non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha^2+1=0$. Infatti, in tal caso $\alpha^2 = -1 < 0$, assurdo. Però $i, -i \in \mathbb{C}$ sono entrambi radice di X^2+1.

TEOREMA DI RUFFINI

f come sopra, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$f(\alpha)=0 \iff f=(X-\alpha)g(X)$$ per un opportuno polinomio g.

Dim.

"$\Leftarrow$" Sia $f=(X-\alpha)g(X)$. Allora $f(\alpha)=\underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0}g(\alpha)=0$

"$\Rightarrow$" $X-\alpha$ non è il pol. nullo. Quindi posso dividere f per $X-\alpha$ con il resto:

$$(*) \qquad f(X)=(X-\alpha)g(X)+r(X)$$

$X-\alpha$ ha grado 1, quindi $r=0$ oppure $\partial(r)<\partial(X-\alpha)$

cioè $\partial(r)=0$ e $r\in\mathbb{R}$ $r\neq 0$ (r è un pol. costante)

Sostituisco X con α in $(*)$: $f(\alpha)=\underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0}g(\alpha)+r^{\text{SP.}}$

Quindi $0=f(\alpha)=r$ $\quad r=0$ e

da $(*)$ segue $f(X)=(X-\alpha)\cdot g(X)$. ∎

OSSERVAZIONE

Può benissimo capitare che $g(\alpha)=0$. Oppure no.

Ad esempio

$$f=X^3-X^2-X+1=(X-1)\overbrace{(X^2-1)}^{g(X)}=(X-1)(X-1)(X+1)=(X-1)^2(X+1)$$

$$f=X^3-X^2+X-1=\underbrace{(X-1)(X^2+1)}_{\text{usando solo coeff. reali non posso fare meglio}}=\underbrace{(X-1)(X-i)(X+i)}_{\text{se uso coeff. complessi posso farlo.}}$$

La seguente def. sarà molto importante per noi:

Def. Sia $f(X)$ un polinomio fissato, di grado $n \geq 1$, e sia α una sua radice. Diremo che α ha ~~[illegible]~~ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA m (m è un numero intero ≥ 1) se valgono entrambe le condizioni:

$$\boxed{f(X) = (X-\alpha)^m g(X) \quad e \quad g(\alpha) \neq 0}$$

Per esempio, $\alpha = 1$ ha molt. alg. $= 2$ per $f = X^3 - X^2 - X + 1$.
Infatti $f = (X-1)^2(X+1)$ cioè $g(X) = X+1$. Ma allora $g(1) = 1+1 \neq 0$.

Il nostro interesse per i numeri complessi è dovuto essenzialmente al seguente

TEOREMA (FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA)
Ogni polinomio di grado $n \geq 1$, a coefficienti complessi (in particolare, i coeff. possono essere in $\mathbb{R}$) ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. SPIEG.

Se $n=1$, allora $f(X) = aX + b$ con $b, a \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$.

$aX + b = 0 \Rightarrow X = -\frac{b}{a}$ è OK e $\alpha = -\frac{b}{a}$

Se $n = 2$, allora $f(X) = aX^2 + bX + c$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ $a \neq 0$

Considero $b^2 - 4ac = (\rho, \alpha)$ devo trovare "$\sqrt{b^2-4ac}$"

modulo Argomento

Cioè devo trovare tutti i numeri complessi z t.c.

$z^2 = b^2 - 4ac$ Se $z = (r, \beta)$, allora $r^2 = \rho$ $2\beta = \alpha$

$\Rightarrow r = \sqrt{\rho}$ $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$0 \le \alpha < 2\pi \Rightarrow 0 \le \frac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow 0 \le \frac{\alpha}{2} + \pi < 2\pi$

Quindi trovo i due numeri:

$z = \left(\sqrt{\rho}, \frac{\alpha}{2}\right)$ e $\left(\sqrt{\rho}, \frac{\alpha}{2} + \pi\right) = -z$

Allora le soluzioni dell'equazione di 2° grado
$f(X) = aX^2 + bX + c = 0$ sono

$\alpha_1 = \frac{-b+z}{2a}$ $\alpha_2 = \frac{-b-z}{2a}$

Verifichiamolo (per α_2: A LORO):

$f(\alpha_1) = a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = a\frac{b^2 - 2bz + z^2}{4a^2} + b\frac{-b+z}{2a} + c =$

$= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{2bz} + \cancel{b^2} - \cancel{4ac} - \cancel{2b^2} + \cancel{2bz} + \cancel{4ac}}{4a} = 0$

$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = \left(X - \frac{-b+z}{2a}\right)\left(X - \frac{-b-z}{2a}\right) = \frac{(2aX + b - z)(2aX + b + z)}{4a^2} =$

$= \frac{(2aX+b)^2 - z^2}{4a^2} = \frac{4a^2X^2 + 4abX + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} =$

$= X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \Rightarrow f(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$

Se $a = 1$ tutti questi "problemi" non ci sono.

Se $n \geq 3$ allora .....

Oss $f(X)$ e $a_n^{-1} f(X) = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} X^{n-1}$ hanno le stesse radici - SPIEG. 20/9/17

Vediamo una conseguenza del TFA.

Sia f un polinomio a coeff. complessi, di grado $n \geq 1$. Coi casi visti sopra possiamo assumere $n \geq 3$.

Sia $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ una radice di f. Cioè $f(\alpha_1) = 0$.

Allora, per il teorema di Ruffini $f(X) = (X - \alpha_1) g(X)$.

Il grado di g è $n-1 \geq 2$. Allora per il TFA esiste $\alpha_2 \in \mathbb{C}$ t.c. $g(\alpha_2) = 0$. Quindi

$$g(X) = (X - \alpha_2) l(X) \implies f(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) l(X)$$

Il grado di $l(X)$ è $(n-1) - 1 = n - 2 \geq 1$. Per il TFA esiste $\alpha_3 \in \mathbb{C}$ t.c. $l(X) = (X - \alpha_3) u(X)$. Quindi

$$f(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) u(X)$$ e così via.

Fino a quando posso andare avanti?

Chiaramente fino a

$$\underbrace{f(X)}_{\text{pol. di grado } n} = \underbrace{(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)}_{\text{pol. di grado } n} w \implies w \in \mathbb{C} \quad w \neq 0$$

$f = a_n X^n + \dots \quad a_n \neq 0, \quad g = b_m X^m + \dots \quad b_m \neq 0$

Allora $fg = a_n b_m X^{n+m} + \dots$ e vale $a_n b_m \neq 0$

Quindi $\boxed{\partial(f \cdot g) = \partial(f) + \partial(g)}$ ⌟

$f(X) = a_n X^n + \dots = w X^n + \dots \implies w = a_n$

In conclusione abbiamo

$$f(X)=a_n(X-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_n)$$

Non ho mai detto che gli "α_j" siano distinti tra loro. Quindi una scrittura più precisa è

$$f(X)=a_n(X-\beta_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(X-\beta_r)^{m_r}$$ con $\beta_1,\ldots,\beta_r\in\mathbb{C}$

$r\le n$ e $j\ne h \Rightarrow \beta_j\ne\beta_h$.

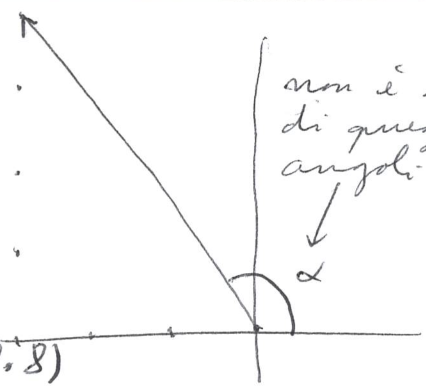
Infine $m_1,\ldots,m_r$ sono numeri naturali ≥ 1 tali che

$$m_1+\ldots+m_r=n$$

m_j è la molt. algebrica di β_j per f

ESERCIZIO

Calcolare $\dfrac{5}{-3+i4}$.



$$|-3+i4|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\alpha=\operatorname{Arg}(-3+i4)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)=\operatorname{arcsen}(0{,}8)$$

Oppure

$$(-3+i4)(-3-i4)=9+16=25$$ da cui

$$\frac{1}{-3+i4}=-\frac{3}{25}-i\frac{4}{25}\implies\frac{5}{-3+i4}=\underline{\underline{-\frac{3}{5}-i\frac{4}{5}}}$$

$$\frac{5}{-3+i4}=\underbrace{\left(1,\ 2\pi-\alpha\right)}_{\text{in forma trigonometrica}}$$

$$\frac{Z-1}{Z+1}$$