LEZIONE 4

SPAZI VETTORIALI

21/9/17

$n \geq 1$ numero intero fissato.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = v : v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ORDINATI !!!

chiameremo gli elementi di $\mathbb{R}^n$ VETTORI

Abbiamo visto che è sensato e conveniente introdurre in $\mathbb{R}^n$ due operazioni

queste, invece, sono addizioni in $\mathbb{R}$

(1) $$\underbrace{u + v}_{\text{NUOVO}} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{vmatrix}$$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$

(2) $$a \cdot v = a \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} a \cdot v_1 \\ a \cdot v_2 \\ \vdots \\ a \cdot v_n \end{vmatrix}$$ $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

queste sono moltiplicazioni in $\mathbb{R}$

PROPRIETÀ ← scriverle esplicitamente

Le pr. di + in $\mathbb{R}$ sono: associativa, esistenza el.to neutro 0, esistenza opposto, commutativa.

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u + v = \dots = \begin{vmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{vmatrix} \overset{\text{SPIEG.}}{=} \begin{vmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix} = v + u$$

Anche l'addizione di vettori def. in (1) è commutativa.

$u, v, w \in \mathbb{R}^n$

per la propr. assoc. di + in $\mathbb{R}$

$$u + (v + w) = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 + (v_1 + w_1) \\ \vdots \\ \; \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (u_1 + v_1) + w_1 \\ \vdots \\ (u_n + v_n) + w_n \end{vmatrix} = \dots = (u + v) + w$$

Anche l'~~addiz~~ addizione di vettori def in (1) è associativa.

L'elemento neutro per l'addiz definita in (1) è $\begin{vmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$ lo indico $0_{\mathbb{R}^n}$ SPIEG.

21/9/17

se $v = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$, allora $-v$ è $\begin{vmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{vmatrix}$

Quindi le proprietà dell'addizione di vettori def. in (A) sono <u>le stesse</u> delle proprietà dell'addizione in $\mathbb{R}$.

<u>alfabeto greco</u> (non è completo)

α	ALFA	φ	FI	σ	SIGMA
β	BETA	λ	LAMBDA	τ	TAU
γ	GAMMA	μ	MI	ω	OMEGA
δ	DELTA	ν	NI	ψ	PSI
ε	EPSILON	π	PI		
η	ETA	ρ	RO		

<u>Inoltre valgono le proprietà</u>:

- $(\alpha+\beta) v = \alpha v + \beta v$ $\quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta) v$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- $1 \cdot v = v$ $\quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

(lo si vede allo stesso modo che per le proprietà dell'addizione)

Def. di <u>SPAZIO VETTORIALE</u>

$\mathbb{R}^n$ è un esempio di s. vett.

Vedremo altri esempi che sono essenzialmente distinti da $\mathbb{R}^n$.

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

- per ogni $v \in V$ $\boxed{0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V}$

Infatti: $v = 1_{\mathbb{R}} \cdot v = (1_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}})v = 1_{\mathbb{R}} \cdot v + 0_{\mathbb{R}} \cdot v = v + 0_{\mathbb{R}} \cdot v$

da cui $0_{\mathbb{R}} \cdot v = v - v = 0_V$

- per ogni $a \in \mathbb{R}$ $\boxed{a \cdot 0_V = 0_V}$

$$a \cdot 0_V = a \cdot (0_V + 0_V) = a \cdot 0_V + a \cdot 0_V \Rightarrow$$

$$a \cdot 0_V = a \cdot 0_V - a \cdot 0_V = 0_V$$

- $\underbrace{\text{Se } v \neq 0_V \text{ allora } av = 0_V}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{a = 0}_{\text{TESI}}$

Lo dimostro per assurdo, cioè nego la tesi. Questo significa che suppongo che sia vero il contrario della tesi. Nel nostro caso suppongo $a \neq 0$ (ho "guadagnato" un'informazione in più)

Allora esiste $a^{-1} \in \mathbb{R}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = 1$.

Infine, ragiono così:

$$a \cdot v = 0_V \Rightarrow \underbrace{a^{-1}(av) = a^{-1}0_V}_{\text{SPIEG.}} = 0_V$$

$$0_V = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = 1_{\mathbb{R}} v = v$$

cioè $v = 0_V$ assurdo.

(4)

ESERCIZIO

21/9/17

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u, v \in \mathbb{R}^3$$

$$u + v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-1 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 2 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u + 3v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(-1) \\ 3(-1) \\ 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 1-3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}(u+3v) = -\frac{1}{2}u - \frac{3}{2}v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) \\ -\frac{1}{2}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ arbitrari. Allora:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\left[\frac{1}{2}(u+v)\right] + b\left[-\frac{1}{2}(u+3v)\right] =$$

SPIEG.

$$= \frac{a}{2}(u+v) - \frac{b}{2}(u+3v) = \frac{a}{2}u + \frac{a}{2}v - \frac{b}{2}u - \frac{3}{2}bv =$$

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)u + \left(\frac{a}{2} - \frac{3}{2}b\right)v$$

Verifichiamolo per altra via

$$\lambda u + \mu v \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-\mu \\ \lambda-\mu \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ 0 \end{vmatrix}$$ equivale a $\begin{cases} 3\lambda-\mu = a \\ \lambda-\mu = b \end{cases}$ (*)

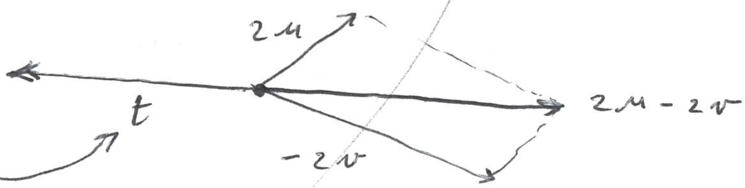
~~risolvo per esercizio~~

non

ESERCIZIO "

$u, v \in \mathbb{R}^3$ come sopra $w = \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda u + \mu v = w$?

$$= \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} = 2u - 2v \qquad \boxed{2u - 2v - t = 0_{\mathbb{R}^3}}$$



COMMENTARE

"Tutti tirano da tutte le parti, ma non si muove niente."

Risolvo il sistema lineare (*) nelle incognite λ, μ.
SL

Lo riscrivo:

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu - a = 0 \\ \lambda - \mu - b = 0 \end{cases}$$

Considero il SL (**) $\begin{cases} (3\lambda-\mu-a) - (\lambda-\mu-b) = 0 \\ \lambda-\mu-b = 0 \end{cases}$

guardare attentamente le equazioni

Ogni soluzione di (*) è anche soluzione di (**).
Vale anche il viceversa! SPIEGARE. Quindi (*) e (**) hanno le stesse soluzioni; si dice che sono SL equivalenti.

(**) $\begin{cases} 3\lambda - \mu - a - \lambda + \mu + b = 0 \\ \lambda - \mu - b = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2\lambda = a - b \\ \lambda - \mu = b \end{cases}$ ---

SPIEGARE

ESEMPIO

Considero i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u=\begin{vmatrix}2\\0\\1\end{vmatrix}$ $v=\begin{vmatrix}4\\10\\-5\end{vmatrix}$ $w=\begin{vmatrix}1\\5\\-3\end{vmatrix}$ $t=\begin{vmatrix}6\\0\\3\end{vmatrix}$

Sia

$W=\{\underbrace{au+bv+cw+dt}_{\text{è un unico vett. di } \mathbb{R}^3} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ SPIEGARE!

cambiando i coeff. cambia.

Per esempio $a=b=c=d=0_{\mathbb{R}} \Rightarrow 0\cdot u+0\cdot v+0\cdot w+0\cdot t=0_{\mathbb{R}^3}$

$0_{\mathbb{R}^3}\in W$ Poi, presi comunque

$au+\dots+dt$, $a'u+b'v+c'w+d't \in W$ li sommo:

$\underbrace{(au+bv+cw+dt)}_{\text{è un unico vett.}}+\underbrace{(a'u+b'v+c'w+d't)}_{\text{anche lui}} =$ propr. assoc. di + e commut.

$= au+a'u+bv+b'v+cw+c'w+dt+d't=$

$=\underbrace{(a+a')}_{\in\mathbb{R}}u+\underbrace{(b+b')}_{\in\mathbb{R}}v+\underbrace{(c+c')}_{\in\mathbb{R}}w+\underbrace{(d+d')}_{\in\mathbb{R}}t \in W$

La somma di due qualsiasi el.ti di W è ancora in W.

ESERCIZIO Se $r\in W$ è arbitrario e $f\in\mathbb{R}$ è anche arbitrario, verificare che $fr\in W$.

Osservo che

$$t=\begin{vmatrix}6\\0\\3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cdot 2\\3\cdot 0\\3\cdot 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2\\0\\1\end{vmatrix}=3u$$

Quindi t è "inutile":

$au+bv+cw+dt=au+bv+cw+3du=$

$=(a+3d)u+bv+cw$

mi bastano questi per costruire ogni vett. di W

Per capire se c'è qualcosa d'altro di inutile conviene "privilegiare" i vettori con molti zeri, e magari aumentare il numero degli zeri negli altri.

Tra u, v, w l'unico con qualche "0" è u.

Lo tengo come punto di partenza; poi:

$$v' = v + 5u = \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5\cdot 2 \\ 5\cdot 0 \\ 5\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+10 \\ 10+0 \\ -5+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Con u e v mi costruisco v'.

Ma se ho u e v', allora $v = v' - 5u$ cioè mi sono costruito v.

v' è più "semplice" di v; quindi butto via v e tengo v'.

$$v'' = \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad v' = \begin{vmatrix} 2\cdot 7 \\ 2\cdot 5 \\ 2\cdot 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} = 2v'' \qquad \text{e} \qquad v'' = \frac{1}{2} v'$$

v'' è più semplice di v'; scarto v' e tengo v''.

La lista aggiornata è, allora:

$$u = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad v'' = \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{vmatrix}$$

perchè non mandare a zero anche questo?

$$w' = w + 3u = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} = v'' \quad !!!$$

Quindi per costruire W i vettori veramente indispensabili sono

$$\underline{u = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad \underline{v'' \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}}$$

21/9/17 (7,5)

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

$v_1, \ldots, v_s \in V$ vettori

$\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ scalari

$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s}$ è un (unico!!!) vettore di V

questa scrittura viene detta COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \ldots, v_s$ mediante gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

OSSERVAZIONE

Ogni el.to di $\mathbb{R}^n$ si può ottenere come C.L. di un numero finito di vettori di $\mathbb{R}^n$, fissati opportunamente a priori. Per esempio

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} + \ldots + a_n \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad e_n = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ non cambiano

(cioè "sono fissati a priori"). Cambiano solo i coefficienti.

$P = \mathbb{R}[X]$

P sia l'insieme di tutti i polinomi in x, a coeff. in $\mathbb{R}$. $+, \cdot$

Si verifica che rispetto alle operazioni spiegate sopra, P è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

<u>PBL</u> Esistono $f_1, \dots, f_t \in P$ tali che ogni polinomio è C.L. (a coeff. reali) di $f_1, \dots, f_t$?

Il punto essenziale è che $f_1, \dots, f_t$ sono <u>in numero finito</u>.

<u>Supponiamo</u> esistano $f_1, \dots, f_t \in P$ con la proprietà richiesta.

Sia m il massimo dei loro gradi.

Allora il massimo grado possibile per $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_t f_t$ $(\in P)$ è sempre m.

Quindi facendo tutte le possibili CL di $f_1, \dots, f_t$ non riuscirò mai a trovare x^{m+1}, per esempio.

Quindi la risposta al nostro PBL è NO.

$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ è fam. di poly che funziona

Ma è una famiglia infinita. Ogni $f \in P$ è CL di un numero finito di essi.