Capitolo quinto

Vettori e matrici

1. *Vettori-colonna e vettori-riga*

Un *vettore-colonna* è una collezione ordinata di numeri scritti verticalmente. Esempi di vettori di questo tipo sono:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

I singoli numeri che compaiono in tali vettori si dicono *componenti* dei vettori stessi ed il numero delle componenti di un vettore costituisce una delle sue caratteristiche essenziali. Cosí i primi due dei vettori sopra scritti ammettono due componenti, gli altri due tre e l'ultimo quattro. Quando, piú in generale, considereremo vettori-colonna con n componenti, scriveremo:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Analogamente un *vettore-riga* è una collezione ordinata di numeri scritti orizzontalmente. Esempi di vettori di questo tipo sono:

$$(1, 0), \quad (-2, 1), \quad (2, -3, 4, 0), \quad (-1, 2, -3, 4, -5).$$

Ciascun numero che compare nella rappresentazione di un vettore siffatto è detto ancora *componente* di esso ed anche per i vettori-riga il numero delle componenti è un'importante caratteristica. Cosí i primi due vettori-riga sopra scritti ammettono due componenti, il terzo quattro e l'ultimo cinque. Il vettore $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ è un vettore-riga ad n componenti.

Due vettori-riga oppure due vettori-colonna si dicono *uguali* se, e soltanto se, le componenti corrispondenti dell'uno e dell'altro sono uguali fra loro. Cosí, nel caso dei vettori

$$u = (1,\ 2), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = (1,\ 2), \quad x = (2,\ 1),$$

vediamo che $u = w$, ma $u \neq v$ ed $u \neq x$.

Se u e v sono due vettori-colonna a tre componenti, definiamo la loro somma $u + v$ come segue:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, se u e v sono due vettori-riga a tre componenti, la loro somma risulta definita in virtú della formula:

$$u + v = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Si noti che la somma di due vettori a tre componenti è un altro vettore ancora a tre componenti. Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e

$$(4, -7, 12) + (3, 14, -14) = (7, 7, -2).$$

La somma di due vettori (riga oppure colonna) ad n componenti si definisce in modo analogo mediante una regola di addizione relativa alle loro stesse componenti e questo procedimento conduce ad un altro vettore ad n componenti. Si osservi che nelle definizioni di somma che abbiamo adottato abbiamo sempre supposto che i due vettori fossero dello stesso tipo, ossia entrambi riga, oppure entrambi colonna, e che essi avessero lo stesso numero di componenti.

Poiché la somma di due numeri non cambia mutando l'ordine degli addendi, anche nella somma di due vettori non ha alcun interesse l'ordine nel quale essi si addizionano; ossia vale sempre l'identità:

$$u + v = v + u,$$

dove u e v sono due vettori entrambi riga oppure entrambi colonna. Questa circostanza traduce la cosiddetta *proprietà commutativa della somma di vettori*. Un esempio numerico è:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ora che abbiamo definito la somma di due vettori, possiamo facilmente riconoscere che, per addizionare fra loro tre o piú vettori, si può procedere per gradi riconducendosi sempre alla somma di due soltanto di essi proprio come avviene per la somma di due o piú numeri. Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned}(1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) &= (1, 2, 0) + (0, 0, 3) = (1, 2, 3) = \\ &= (1, 0, 0) + (0, 2, 3) = (1, 2, 3).\end{aligned}$$

In generale, la somma di un numero qualunque di vettori (riga o colonna) tutti con il medesimo numero di componenti è il vettore che ha come prima componente la somma delle prime componenti di tutti i vettori assegnati, come seconda la somma delle seconde, ecc.

Il prodotto di un numero a per un vettore v è il vettore che ha per componenti le componenti del primo moltiplicate per a. Nel caso di un vettore-colonna a tre componenti, si ottiene:

$$au = a\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \\ au_3 \end{pmatrix}$$

e per un vettore-riga a tre componenti:

$$av = a(v_1, v_2, v_3) = (av_1, av_2, av_3).$$

Se u è un vettore (riga o colonna) con n componenti, allora au risulta definito in modo analogo, mediante la generalizzazione del caso precedente.

Dato un qualunque vettore u, si definisce il suo *opposto* $-u$ in base alla formula: $-u=(-1)\,u$. Cosí, nell'ipotesi che u sia un vettore-riga a tre componenti, avremo:

$$-u=(-1)\,(u_1, u_2, u_3)=(-u_1, -u_2, -u_3).$$

Introdotti in questo modo i vettori negativi, è immediato riconoscere come si deve procedere per eseguire la differenza di due vettori: basterà eseguire la loro somma algebrica. Per esempio, nel caso di vettori-colonna a tre componenti, abbiamo:

$$u-v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_1\\v_3\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\u_3-v_3\end{pmatrix}.$$

Particolari esempi di differenza fra vettori saranno dati negli esercizi alla fine di questo paragrafo.

Un vettore molto importante è il vettore zero, o vettore nullo, le cui componenti sono tutte nulle. Per esempio, i vettori zero a tre componenti sono:

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 0=(0, 0, 0).$$

Quando non vi sia pericolo di confusione, adotteremo per questi vettore il simbolo 0 come abbiamo fatto qui sopra; il motivo di questo simbolismo apparirà chiaro nel seguito. Il vettore zero gode della notevole proprietà che, qualunque sia il vettore u, è sempre $u+0=u$. Se u è un vettore-colonna a tre componenti, l'affermazione precedente è suscettibile della seguente dimostrazione:

$$u+0=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+0\\u_2+0\\u_3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=u.$$

Uno dei maggiori vantaggi offerti dall'impiego dei vettori è quello di poter rappresentare un'intera collezione di numeri mediante una sola lettera, come u, v, ..., e di poter considerare una collezione siffatta come un tutto unico. L'uso di tali notazioni rende possibile stabilire in modo molto semplice relazioni piuttosto complesse. Il lettore troverà molti esempi di ciò nel seguito di questo capitolo e nei due capitoli successivi.

Esercizi

1. Dati i vettori:

$$u=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}, \quad w=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

calcolare:

a) $2u$; $\left[R. \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}.\right]$

b) $-v$;
c) $2u-v$;

d) $v+w$; $\left[R. \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}.\right]$

e) $u+v-w$;
f) $2u-3v-w$;

g) $3u-v+2w$. $\left[R. \begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix}.\right]$

2. Risolvere gli stessi quesiti posti da a) e g) dell'esercizio 1, quando tre vettori assegnati siano:

$$u=(7,\ 0,\ -3), \quad v=(2,\ 1,\ -5), \quad w=(1,\ -1,\ 0)$$

3. Dimostrare che:
   a) il vettore zero resta invariato quando lo si moltiplica per un qualunque numero;
   b) qualunque sia il vettore u, $0+u=u$.

4. Siano u e v due vettori-riga oppure colonna con il medesimo numero di componenti; dimostrare che $u+0v=u$ e $0u+v=v$.

5. Se $2u-v=0$, quale relazione intercede fra le componenti di u e quelle di v? [*R.* $v_i=2u_i$, qualunque sia l'intero i.]

6. Risolvere lo stesso problema dell'esercizio 5, quando i vettori siano legati dalla relazione:
   a) $-3u+5v+u-7v=0$,
   b) $20v-3u+5v+8u=0$.

7. Eseguire, quando sia possibile, le seguenti somme di vettori e, nel caso in cui esse non possano essere calcolate, spiegare il motivo di questa

impossibilità:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix},$$

b) $(2, -1, -1) + 0\,(4, 7, -2)$,

c) $(5, 6) + 7 - 21 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) $1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

8. Essendo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare u_1, u_2 ed u_3. [*R.* 0, —2, —2.]

9. Essendo $2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, determinare le componenti di v.

10. Se $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cosa può dirsi circa le componenti u_1, u_2, u_3?

11. Se $0\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cosa può dirsi circa le componenti u_1, u_2, u_3?

12. Supponiamo di associare ad ogni individuo un vettore-riga a tre componenti corrispondenti rispettivamente ai seguenti dati: età, altezza e peso. Avrebbe senso addizionare fra loro i vettori relativi a due persone distinte? Avrebbe senso moltiplicare uno qualunque dei vettori considerati per un numero?

13. Supponiamo di associare ad ogni massaia che esce da un negozio di generi alimentari un vettore-riga le cui componenti esprimano ordinatamente le quantità di ciascun prodotto da essa acquistato. Rispondere alle medesime domande dell'esercizio 12.

14. Supponiamo di associare ad ogni negozio di generi alimentari un vettore-colonna, le cui componenti forniscano ordinatamente i prezzi unitari di ciascun prodotto in esso venduto. Avrebbe senso addizionare i vettori associati a due negozi diversi? Avrebbe senso moltiplicare uno qualunque dei vettori considerati per una costante? Stabilire e discutere le eventuali differenze presentate da questo problema rispetto a quello dell'esercizio 12 ed a quello dell'esercizio 13.

*15. In un certo ordine di scuole, gli studenti frequentano quattro corsi d'insegnamento ogni semestre e, alla fine di tale periodo, sono classificati secondo le votazioni possibili A, B, C, D ed F. I risultati finali relativi al profitto di ciascun studente sono presentati sotto forma di vettore-riga e la loro media viene calcolata assegnando 4, 3, 2, 1 e 0 punti per ogni A, B, C, D ed F rispettivamente e poi dividendo per quattro la somma cosí ottenuta.

a) Quali risultano le possibilità logiche relative al vettore delle classificazioni di uno studente la cui media sia eguale a 4?

b) E nel caso che egli consegua una media eguale a 3?

c) E nel caso che egli consegua una media eguale a 2?

*16. Si considerino i vettori:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

si dimostri che il vettore

$$\frac{1}{2}(x + y)$$

ammette componenti che risultano ordinatamente le *medie* delle componenti del vettore x e di quelle del vettore y. Si generalizzi tale dimostrazione al fine di contemplare il caso generale di n vettori assegnati.

*17. a) Si dimostri che l'equazione vettoriale

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

equivale a due equazioni lineari nelle variabili x ed y.

b) Si risolvano le due suddette equazioni rispetto ad x e ad y e, sostituendo le soluzioni cosí ottenute nell'equazione vettoriale assegnata, si verifichi l'esattezza dei risultati conseguiti.

*18. Si scriva sotto forma vettoriale il seguente sistema di due equazioni lineari nelle incognite x ed y:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

(*Suggerimento.* Si tenga presente il precedente esercizio 17.)

*19. Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per definizione, $x \geqslant 0$ sia la congiunzione delle due proposizioni $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$; si definisca in modo analogo $x \leqslant 0$. Si dimostri poi che, quando $x \geqslant 0$, $-x \leqslant 0$.

*20. Applicando convenientemente la definizione introdotta nel precedente esercizio 19, si definisca la relazione di diseguaglianza $x \geqslant y$ mediante la differenza $x - y$, essendo x ed y due vettori della medesima specie. Si considerino quindi i seguenti quattro vettori:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Si dimostri che $x \geqslant y$.
b) Si dimostri che $u \geqslant y$.
c) Fra x ed u intercede qualche relazione notevole?
d) Si dimostri che $v \geqslant x$, $v \geqslant y$ e $v \geqslant u$.

*21. Si dimostri che, se $x \geqslant y$ ed $y \geqslant u$, allora $x \geqslant u$.

*22. Si determini in quale modo si possa pervenire ad un vettore u per cui si abbia

$$u \geqslant x^{(i)},$$

qualunque sia l'indice i ed essendo assegnato l'insieme di n vettori

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots, x^{(n)}.$$

Si determini pure in quale modo si possa pervenire, nelle medesime ipotesi, ad un vettore v per cui si abbia invece

$$v \leqslant x^{(i)}.$$

2. *Prodotto di vettori*

Il lettore si sarà certamente chiesto il motivo per cui sono stati introdotti sia i vettori-colonna che i vettori-riga dal momento che le loro proprietà sono tanto simili. A tale domanda si può rispondere in molti modi diversi. In primo luogo, in numerose applicazioni, intervengono due tipi di grandezze le quali tuttavia devono essere considerate simultaneamente e quindi è opportuno rappresentare quelle di un tipo con un vettore-riga e quelle dell'altro mediante un vettore-colonna. Secondariamente, esiste un procedimento per combinare i vettori-riga e quelli colonna che si rivela molto utile in particolari sviluppi di calcoli. Chiariremo questi concetti con il seguente semplicissimo esempio.

Esempio 1. — Supponiamo che un tale, di nome Rossi, si rechi da un fruttivendolo e comperi una dozzina di uova, una dozzina di arance, mezza dozzina di mele, mezza dozzina di pere e tre limoni. Rappresentiamo le sue compere con il seguente vettore-riga:

$$x = [6\ \text{(mele)},\ 12\ \text{(uova)},\ 3\ \text{(limoni)},\ 12\ \text{(arance)},\ 6\ \text{(pere)}] = \\ = (6,\ 12,\ 3,\ 12,\ 6).$$

Supponiamo che i prezzi unitari delle mele, delle uova, dei limoni, delle arance e delle pere siano rispettivamente 30, 40, 60, 35 e 50 lire; possiamo elencarli introducendo il vettore-colonna:

$$y = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{lire ogni mela} \\ \text{lire ogni uovo} \\ \text{lire ogni limone} \\ \text{lire ogni arancia} \\ \text{lire ogni pera.} \end{array}$$

Viene ora spontaneo chiedersi quanto spende in tutto Rossi. Per conoscere quale conto gli verrà presentato, basta moltiplicare il vettore x, che esprime il numero delle unità di ogni prodotto acquistato, per il vettore y, che ne indica il corrispondente costo unitario; tale prodotto si dispone nella seguente forma:

$$x \cdot y = (6,\ 12,\ 3,\ 12,\ 6) \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \\ 35 \\ 50 \end{pmatrix} \text{lire} =$$

$$= (6 \cdot 30 + 12 \cdot 40 + 3 \cdot 60 + 12 \cdot 35 + 6 \cdot 50)\ \text{lire} =$$
$$= (180 + 480 + 180 + 420 + 300)\ \text{lire} =$$
$$= 1.620\ \text{lire.}$$

1560

Questo, naturalmente, è il conto che il fruttivendolo mostra a Rossi.

In generale, adotteremo per il prodotto di vettori-riga per vettori-colonna la definizione:

Definizione. — Siano u un vettore-riga e v un vettore-colonna aventi lo stesso numero n di componenti; allora definiremo il prodotto $u \cdot v$ in base alla seguente formula:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Si noti che il vettore-riga è sempre scritto per primo ed il vettore-colonna per secondo: questo è il solo tipo di moltiplicazione fra vettori che noi considereremo. Diamo ora alcuni esempi di prodotto di vettori:

$$(2,\ 1,\ -1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} = 2\cdot 3 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 = 1\,,$$

$$(1,\ 0)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 + 0 = 0\,.$$

Si osservi che il prodotto di due vettori è sempre un *numero*.

Esempio 2. — Consideriamo un'organizzazione industriale, che schematizzeremo al massimo riducendola a tre industrie (carbone, elettricità ed acciaio) ed a tre consumatori (1, 2, 3). Supponiamo che ogni consumatore assorba una percentuale del prodotto di ciascuna industria ed allo stesso modo ogni industria assorba una parte del prodotto delle altre due. Supponiamo anche che le quantità usate siano o positive o nulle, poiché l'impiego di una quantità negativa non è suscettibile di nessuna giustificazione attuale. Possiamo rappresentare le necessità di ogni consumatore e di ogni industria mediante un vettore (riga), che diremo brevemente " richiesta ", a tre componenti; la prima componente indica la quantità di carbone necessaria al consumatore oppure all'industria, la seconda l'importo analogo relativo all'elettricità e la terza quello relativo all'acciaio, il tutto riferito a convenienti unità di misura. Per esempio, le richieste dei tre consumatori potrebbero essere:

$$r_1 = (3,\ 2,\ 5), \qquad r_2 = (0,\ 17,\ 1), \qquad r_3 = (4,\ 6,\ 12)$$

e quelle delle tre industrie:

$$r_C = (0,\ 1,\ 4), \qquad r_E = (20,\ 0,\ 8), \qquad r_A = (30,\ 5,\ 0)$$

in cui gli indici C, E ed A stanno per carbone, elettricità ed acciaio rispettivamente. Allora la richiesta complessiva di questi prodotti avanzata dai consumatori è espressa dalla somma:

$$r_1 + r_2 + r_3 = (3,\ 2,\ 5) + (0,\ 17,\ 1) + (4,\ 6,\ 12) = (7,\ 25,\ 18)\,.$$

Analogamente, la richiesta complessiva di questi prodotti avanzata dalle industrie è espressa dalla somma:

$$r_C + r_E + r_A = (0,\ 1,\ 4) + (20,\ 0,\ 8) + (30,\ 5,\ 0) = (50,\ 6,\ 12)\,.$$

Quindi l'importo totale delle richieste è dato dalla somma:

$$(7,\ 25,\ 18) + (50,\ 6,\ 12) = (57,\ 31,\ 30)\,.$$

Supponiamo che il prezzo del carbone sia di cinquecento lire per unità, quello dell'elettricità di mille lire per unità e quello dell'acciaio di duemila lire per unità. Tali prezzi possono rappresentarsi mediante il vettore-colonna:

$$p = \begin{pmatrix}500\\1000\\2000\end{pmatrix} \text{ lire.}$$

Fissiamo ora l'attenzione sull'industria dell'acciaio. Essa vende in totale trenta unità di acciaio a duemila lire per unità, quindi il suo ricavo ammonta a sessantamila lire. Nei diversi prodotti di cui necessita spende una somma calcolabile con il prodotto:

$$r_A\cdot p = (30,\ 5,\ 0)\cdot\begin{pmatrix}500\\1000\\2000\end{pmatrix} \text{ lire} = (15.000 + 5.000)\text{ lire} = 20.000\text{ lire.}$$

Quindi il guadagno dell'industria dell'acciaio è di (60.000 — 20.000) lire, ossia di 40.000 lire. Nei prossimi esercizi si chiederà di calcolare i guadagni delle altre industrie.

Questo schema di organizzazione industriale, tuttavia, non può rispecchiare una situazione reale per due motivi. In primo luogo non abbiamo scelto dati reali per le diverse quantità che intervengono nell'esempio. Secondariamente, cosa molto importante, abbiamo trascurato il fatto che un'industria, quanto piú produce, tanto piú consuma. Di quest'ultima circostanza si terrà conto nel settimo capitolo.

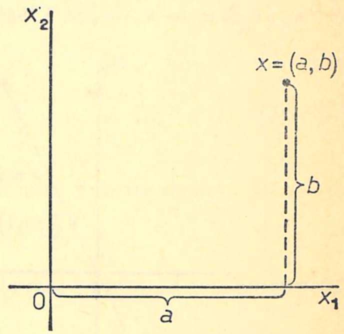

Fig. 96.

Esempio 3. — Consideriamo il sistema di coordinate cartesiane ortogonali rappresentato nella figura 96. Un vettore-riga a due componenti, $x = (a,\ b)$, può essere riguardato come un punto del piano ed individuato proprio con l'ausilio degli assi di riferimento, come mostra l'illustrazione. Il punto $x = (a,\ b)$ si può infatti localizzare partendo dall'origine 0 delle coordinate e muovendosi prima per un tratto di lunghezza a nel senso dell'asse x_1 e poi per un tratto di lunghezza b parallelamente all'asse x_2. Se consideriamo due punti siffatti, precisamente $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$, allora i punti $x + y$, $-x$, $-y$, $x - y$, $y - x$, $-x$, $-y$, ammettono le rappresentazioni geometriche indic ate nella figura 97.

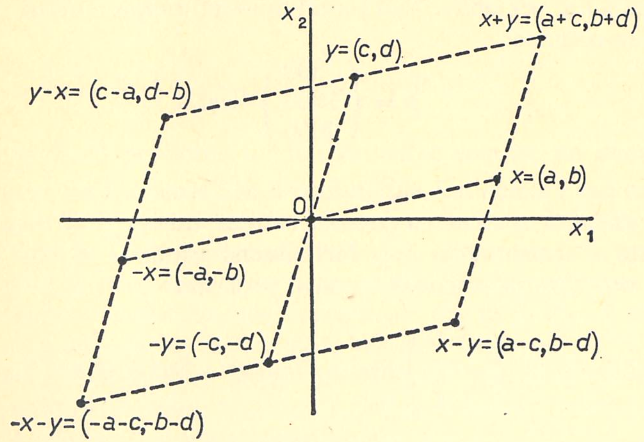

Fig. 97.

Come si vede dalla figura 98, anche il prodotto di un vettore-riga per un numero è suscettibile di un'interpretazione geometrica. In tale grafico abbiamo considerato i punti corrispondenti ai vettori $x = (1, 2)$ e $2x$, $(1/2)x$, $-x$, $-2x$. Osserviamo che tutti i punti ora considerati

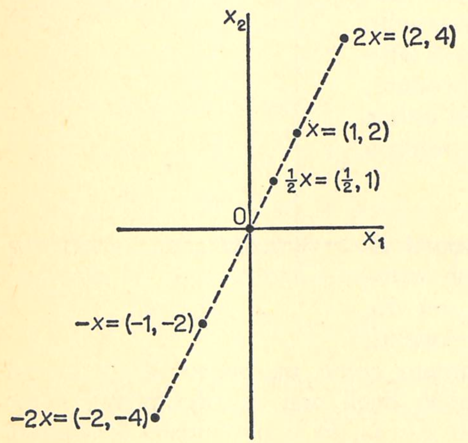

Fig. 98.

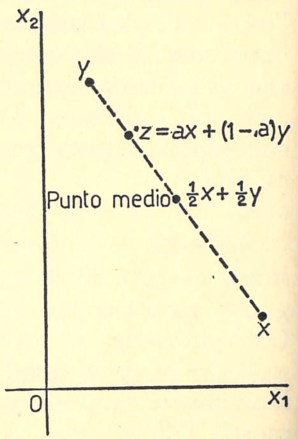

Fig. 99.

giacciono sopra una retta passante per l'origine degli assi di riferimento. Un'altra quantità vettoriale, che ha notevole significato geometrico, è il vettore

$$z = ax + (1 - a)y,$$

essendo a un qualunque numero compreso fra 0 ed 1. Si noti, nella figura 99, che tutti i punti z stanno sopra il segmento congiungente i due punti x ed y. Se $a = 1/2$, il punto corrispondente coincide con il punto medio dello stesso segmento. Cosí, se si verifica che $x = (a, b)$ ed $y = (c, d)$, il punto:

$$\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)y = \left(\frac{1}{2}\right)(a, b) + \left(\frac{1}{2}\right)(c, d) = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

è il punto medio del segmento di estremi x ed y.

Esercizi

1. Dati i vettori:

$$u = (1, -1, 4), \qquad x = (0, 1, 2),$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

calcolare:

a) $u \cdot v + x \cdot y$, [R. 12.]
b) $(-u + 5x) \cdot (3v - 2y)$,
c) $5u \cdot v + 10\,[x \cdot (2v - y)]$, [R. 55.]
d) $2\,[(u - x) \cdot (v + y)]$.

2. Disegnare i punti corrispondenti ai due vettori riga:

$$x = (3, 4) \quad \text{e} \quad y = (-2, 7).$$

Indi determinare i seguenti vettori ed individuare i punti ad essi corrispondenti nel piano:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)y$,
b) $x + y$,
c) $x - 2y$,
d) $\left(\frac{7}{8}\right)x + \left(\frac{1}{8}\right)y$,

e) $3x - 2y$,
f) $4y - 3x$.

3. Se $x = (1, -1, 2)$ ed $y = (0, 1, 3)$ sono due punti dello spazio, qual è il punto medio del segmento avente come estremi x ed y?
$\left[R.\ \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}\right).\right]$

4. Siano u un vettore-riga e v un vettore-colonna entrambi a tre componenti; si dimostri che, essendo a un numero qualunque, è

$$a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av).$$

5. Supponiamo che tre amici Rossi, Brambilla e Bianchi acquistino da un fruttivendolo rispettivamente:
Rossi: due mele, sei limoni, cinque pere;
Brambilla: due dozzine di uova, due limoni, due dozzine di arance;
Bianchi: dieci mele, una dozzina di uova, due dozzine di arance, mezza dozzina di pere.

a) Quante diverse qualità di prodotti essi acquistano? [*R.* 5.]
b) Schematizzare gli acquisti di ciascun amico con un vettore-riga a tante componenti quante sono le unità del numero trovato come risposta per la domanda a).
c) Facendo uso del medesimo vettore dei prezzi introdotto nell'esempio 1, calcolare la spesa di ciascun amico.
[*R.* Rispettivamente 520 lire, 1.920 lire, 1.920 lire.]
d) Mediante una somma di vettori, calcolare la spesa totale dei tre amici esprimendola mediante un vettore-riga.
e) Calcolare in due modi distinti la spesa totale. [*R.* 4.460 lire.]

6. Dimostrare che il prodotto dei vettori gode delle due seguenti proprietà:
a) $u \cdot (av) = a(u \cdot v)$,
b) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
essendo u un vettore-riga a tre componenti, v e w vettori-colonna a tre componenti ed a un numero qualunque.

7. La pubblicazione di un libro si svolge attraverso parecchi stadi: esso deve prima essere composto, poi deve essere stampato ed infine munito di copertina e rilegato. Supponiamo che la paga oraria del tipografo ammonti a cinquecento lire, che il costo della carta sia di una lira al foglio, che la stampatrice venga a costare cinquanta lire per ogni minuto di lavoro, che il prezzo di ogni copertina sia duecento lire e quello di ogni rilegatura ottanta lire. Supponiamo ancora che un editore voglia stampare un libro che richiede trecento ora di lavoro al tipografo, duecentoventi fogli di carta per ciascun esemplare e, sempre per ciascun esemplare, cinque minuti di lavoro della stampatrice.

a) Scrivere un vettore-riga a cinque componenti atto ad indicare le attività necessarie per il primo libro stampato ed un altro vettore-riga atto ad indicare quelle per le seconde, terze, ..., copie di esso. Scrivere un vettore-colonna a cinque componenti che fornisca le spese per le diverse attività relative a ciascun libro, nel medesimo ordine nel quale esse sono state elencate nei precedenti vettori.
b) Mediante un prodotto di vettori, calcolare il costo della pubblicazione di una copia del libro. [*R.* 150.750 lire.]
c) Mediante operazioni di somma e di prodotto di vettori, calcolare la spesa per una prima edizione di quel libro costituita da cinquemila copie. [*R.* 3.840.000 lire.]
d) Nell'ipotesi che le matrici compilate per la prima edizione siano usate di nuovo per le successive ristampe, determinare la spesa per una seconda edizione di cinquemila copie. [*R.* 3.690.000 lire.]

8. Con riferimento all'esempio 2,
a) calcolare l'importo che ogni industria ed ogni consumatore devono pagare per i prodotti da essi rispettivamente impiegati;
b) calcolare il guadagno di ciascuna industria;
c) calcolare la spesa totale di tutte le industrie e di tutti i consumatori;
d) calcolare quale frazione della spesa totale ottenuta in c) spetta alle industrie e quale frazione della stessa spesa ai consumatori.

9. Un costruttore edile ha accettato l'ordinazione di cinque case stile rustico, di sette case stile Cape Cod e di dodici case stile coloniale. Introdurre un vettore-riga x a tre componenti, tale che queste indichino il numero delle case che verranno costruite per ciascun stile. Supponiamo di sapere che, per una casa stile rustico, sono necessarie venti unità di legname, per una casa stile Cape Cod diciotto unità e per una casa stile coloniale venticinque unità. Introdurre un vettore-colonna u le cui componenti esprimano le diverse quantità di legname impiegate per ciascun tipo di costruzione. Calcolare la quantità totale di legname necessario, eseguendo il prodotto xu. [*R.* 526 unità.]

10. Siano dati i vettori:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sia poi il vettore $x = (x_1, x_2)$. Calcolare x_1 ed x_2, sapendo che $x \cdot a = -1$ ed $x \cdot b = 7$. [*R.* $x_1 = -31$, $x_2 = 23$.]

11. Siano dati i vettori:

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare le componenti x_1 ed x_2 del vettore $x = (x_1, x_2)$, sapendo che $x \cdot a = x_1$ ed $x \cdot b = x_2$.

*12. Si considerino i vettori:

$$x = (5,\ 8),\quad y = (3,\ 7),\quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino $\frac{1}{2}\,xf$ ed $\frac{1}{2}\,yf$ e si verifichi che i risultati ottenuti sono eguali, rispettivamente, alle medie delle componenti di x ed y. [*R.* 6,5; 5.]

b) Si calcoli $\frac{1}{4}\,(x+y)\,f$ e si interpreti convenientemente il risultato. [*R. parziale.* 5,75.]

*13. Si considerino due vettori-riga, x ed y, ad n componenti ciascuno e un vettore-colonna f le cui componenti siano tutte eguali ad un certo numero s.

a) Si calcolino $\frac{1}{n}\,xf$ ed $\frac{1}{n}\,yf$ e si interpretino convenientemente i risultati ottenuti.

b) Si calcoli $\frac{1}{2n}\,(x+y)\,f$ e si interpreti convenientemente il risultato ottenuto.

(*Suggerimento.* Il precedente esercizio 12 è un caso particolare di questo.)

*14. Con riferimento ad un esperimento suscettibile di due risultati distinti si possono guadagnare due, oppure tre, biglietti da mille lire con probabilità eguale rispettivamente a 1/3, oppure a 2/3. Si ponga

$$a = (2,\ 3) \quad \text{e} \quad p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

si dimostri che la speranza matematica relativa all'esperimento considerato vale ap.

*15. Con riferimento ad un esperimento suscettibile dei risultati distinti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ciascuno dei quali può verificarsi ordinatamente con probabilità eguale a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, si considerino i vettori:

$$a = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \text{ e } p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che la speranza matematica relativa all'esperimento considerato vale ap.

*16. Si considerino i vettori:

$$a = (a_1,\ a_2) \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

essendo c un numero qualunque, si dimostri che la scrittura $ax = c$ equivale ad una, ed una sola, equazione lineare in due incognite.

*17. Si considerino i vettori:

$$a = (a_1,\ a_2),\quad b = (b_1,\ b_2),\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

essendo c_1 e c_2 numeri qualsiasi, si dimostri che il sistema di relazioni vettoriali

$$ax = c_1$$
$$bx = c_2$$

equivale ad un sistema di due equazioni lineari in due incognite.

*18. Si dimostri che ogni sistema di due equazioni lineari in due incognite è suscettibile di essere scritto nella forma indicata nel precedente esercizio 18.

3. *Matrici e loro legami con i vettori*

Dicesi *matrice* una tabella rettangolare di numeri scritta nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Qui le notazioni a_{ij} stanno ad indicare dei numeri reali ed m ed n sono numeri interi. Si osservi che m è il numero delle righe e n quello delle colonne della matrice, che pertanto noi chiameremo *matrice di tipo* $(m,\ n)$ od anche *matrice* $m \times n$. Se $m = n$, parleremo di *matrice quadrata*. Ecco alcuni esempi di matrici:

$$(1,\ 2,\ 3),\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 18 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il primo esempio è un vettore-riga, ossia una matrice di tipo (1, 3); il secondo è un vettore-colonna, ossia una matrice di tipo (3, 1); il terzo è una matrice quadrata di tipo (2, 2) o, come anche si dice in questo caso, del secondo ordine; il quarto una matrice quadrata di tipo (4, 4), o del quarto ordine; l'ultimo una matrice di tipo (3, 5).

Due matrici dello stesso tipo (ossia aventi il medesimo numero di righe e di colonne) si dicono uguali se, e soltanto se, sono uguali nell'una e nell'altra gli elementi che occupano lo stesso posto.

Si ricordi che, nel tredicesimo paragrafo del quarto capitolo, si era fatto notare che le matrici si presentano spontaneamente nella considerazione dei processi a catene di Markov. Per fornire un'altra illustrazione di come le matrici intervengono nella pratica e sono impiegate unitamente ai vettori consideriamo il seguente esempio.

Esempio 1. — Supponiamo che un costruttore edile abbia accettato di costruire ventiquattro case: cinque di stile rustico, sette di stile Cape Cod e dodici di stile coloniale. Possiamo rappresentare queste ordinazioni con il vettore-riga $x = (5, 7, 12)$. Egli, naturalmente, sa quali sono le "materie prime" necessarie per la costruzione di ogni tipo di stili. Supponiamo che tali materie prime siano: acciaio, legname, vetro, colori e operai. Gli elementi della matrice che ora scriveremo indicano le quantità di ogni materia prima assorbite dalla costruzione di ogni tipo di casa, espresse in convenienti unità di misura (i numeri introdotti sia per le quantità sia per i prezzi sono del tutto arbitrari e non hanno alcuna pretesa di corrispondere a dati reali):

$$\begin{array}{l} \\ \textit{stile rustico} \\ \textit{stile Cape Cod} \\ \textit{stile coloniale} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{acciaio} & \text{legname} & \text{vetro} & \text{colori} & \text{operai} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \end{array} = R.$$

Si noti che gli elementi di ciascuna riga di questa matrice possono essere considerati come le componenti di un vettore-riga a cinque componenti atto ad indicare le quantità di ciascun tipo di materia prima necessarie per ogni singola casa di un determinato stile. E, analogamente, gli elementi di ciascuna colonna della medesima matrice si possono considerare come le componenti da un vettore-colonna a tre componenti atto ad indicare le quantità di ogni singola materia prima necessarie per i diversi tipi di casa. Come si vede una matrice è un mezzo molto preciso, e nello stesso tempo schematico, per esprimere tutte queste informazioni.

Supponiamo adesso che quel costruttore desideri calcolare la quantità di ogni materia prima di cui ha bisogno per realizzare le

costruzioni ordinategli. Indichiamo la precedente matrice con R; per conoscere le quantità di materia prima che verranno impiegate, basta eseguire il prodotto xR, che si dispone come segue:

$$\begin{aligned} xR &= (5,\ 7,\ 12) \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \\ &= (5\cdot 5 + 7\cdot 7 + 12\cdot 6, \quad 5\cdot 20 + 7\cdot 18 + 12\cdot 25, \\ &\quad\ 5\cdot 16 + 7\cdot 12 + 12\cdot 8, \quad 5\cdot 7 + 7\cdot 9 + 12\cdot 5, \\ &\quad\ 5\cdot 17 + 7\cdot 21 + 12\cdot 13) \\ &= (146,\ 526,\ 260,\ 158,\ 388). \end{aligned}$$

Vediamo cosí che egli dovrebbe procurarsi 146 unità di acciaio, 526 unità di legname, 260 unità di vetro, 158 unità di colori e infine 388 operai. Osserviamo che la risposta ottenuta è espressa mediante un vettore-riga a cinque componenti e che ciascuna di queste componenti è stata ottenuta eseguendo il prodotto del vettore x per la colonna della matrice R corrispondente ad essa.

Il nostro costruttore vuole sapere anche quale sarà la sua spesa per le materie prime. Supponiamo che ogni unità di acciaio, legname, vetro, colori e mano d'opera costi, rispettivamente 15, 8, 5, 1 e 10 mila lire. Allora possiamo descrivere i costi unitari mediante il seguente vettore-colonna:

$$y = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 8.000 \\ 5.000 \\ 1.000 \\ 10.000 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto Ry ci indicherà la spesa per ogni tipo di costruzione; otteniamo pertanto:

$$\begin{aligned} Ry &= \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.000 \\ 8.000 \\ 5.000 \\ 1.000 \\ 10.000 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5\cdot 15.000 + 20\cdot 8.000 + 16\cdot 5.000 + 7\cdot 1.000 + 17\cdot 10.000 \\ 7\cdot 15.000 + 18\cdot 8.000 + 12\cdot 5.000 + 9\cdot 1.000 + 21\cdot 10.000 \\ 6\cdot 15.000 + 25\cdot 8.000 + 8\cdot 5.000 + 5\cdot 1.000 + 13\cdot 10.000 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 492.000 \\ 528.000 \\ 465.000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si deduce che la spesa che quel costruttore dovrà affrontare per ogni casa di stile rustico, di stile Cape Cod e di stile coloniale è ordinatamente di 492.000, 528.000, 465.000 lire.

Infine egli potrebbe chiedersi anche quale sarà la spesa totale per le materie prime che saranno necessarie complessivamente per tutte le costruzioni in questione. È facile riconoscere che la risposta a tale quesito è fornita dal prodotto xRy, che possiamo calcolare nei due modi sotto indicati:

$$xRy = (xR)y = (146,\ 526,\ 260,\ 158,\ 388)\begin{pmatrix} 15.000 \\ 8.000 \\ 5.000 \\ 1.000 \\ 10.000 \end{pmatrix} = 11.736.000\,,$$

oppure

$$xRy = x(Ry) = (5,\ 7,\ 12)\begin{pmatrix} 492.000 \\ 528.000 \\ 465.000 \end{pmatrix} = 11.736.000.$$

La spesa totale è quindi 11.736.000 lire.

Per il prodotto di una matrice per un vettore-riga oppure per un vettore-colonna adotteremo, nel caso generale, le seguenti definizioni:

Definizioni. — Siano A una matrice di tipo (m, n); x un vettore-riga ad m componenti; u un vettore colonna ad n componenti; allora i prodotti xA ed Au risultano definiti in base alle formule:

$$xA = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \dots + x_ma_{m1},\ \ x_1a_{12} + x_2a_{22} + \dots + x_ma_{m2},\ \ \dots,\ \ x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \dots + x_ma_{mn}),$$

$$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \quad\quad \cdot \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}.$$

Il lettore troverà queste formule di facile applicazione se noterà

che ogni elemento del prodotto xA, oppure del prodotto Au, è il prodotto del vettore x, oppure del vettore u, per una colonna, oppure per una riga, della matrice A. Si osservi che, per moltiplicare un vettore-riga per una matrice, è necessario che il numero delle righe di questa sia uguale al numero delle componenti del vettore e, come risultato, si ottiene un altro vettore-riga; analogamente, per poter moltiplicare una matrice per un vettore-colonna, il numero delle colonne di questa deve essere uguale al numero delle componenti del vettore e, come risultato, si ottiene un altro vettore-colonna.

Diamo alcuni esempi di prodotto di vettori e di matrici:

$$(1,\ 0,\ -1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = (1\cdot 3 + 0\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot 1 + 0\cdot 3 - 1\cdot 8) =$$
$$= (1,\ -7)\,;$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 + 4 \\ 2 - 3 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che, se x è un vettore-riga ad m componenti ed A una matrice di tipo (m, n), allora xA è un vettore-riga ad n componenti; analogamente, se u è un vettore-colonna ad n componenti, allora Au è un vettore-colonna ad m componenti. Queste ultime circostanze sono messe in risalto dai precedenti esempi.

Esempio 2. — Nell'esercizio 6 del tredicesimo paragrafo del quarto capitolo, abbiamo considerato una catena di Markov con la matrice di transizioni:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Lo stato iniziale era stato scelto in base ad una legge casuale che assegnava a ciascuno degli stati a_1 ed a_2 probabilità 1/2 di essere preso come tale. Indichiamo la scelta dello stato iniziale con il vettore

$p^{(0)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, la cui prima componente esprime la probabilità che sia scelto per stato iniziale a_1 e la seconda la probabilità che sia stata fatta una scelta analoga per a_2. Calcoliamo il prodotto $p^{(0)}P$. Otteniamo:

$$p^{(0)}P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right).$$

Applicando i procedimenti esposti nel quarto capitolo, si può dimostrare che, dopo un passaggio, vi è la probabilità 5/12 che il processo si trovi nello stato a_1 e probabilità 7/12 che esso si trovi nello stato a_2. Sia $p^{(1)}$ il vettore tale che le sue componenti prima e seconda diano rispettivamente la probabilità che, dopo un passaggio, il processo sia nello stato a_1 e nello stato a_2. Con riferimento al nostro esempio è:

$$p^{(1)} = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) = p^{(0)}P.$$

In generale, per qualunque processo di Markov avente come matrice di transizione P e come vettore delle probabilità iniziali $p^{(0)}$, vale la relazione: $p^{(1)} = p^{(0)}P$.

Esempio 3. — Ritorniamo a quel certo signor Rossi di cui al primo esempio del secondo paragrafo di questo capitolo e supponiamo ora che egli abbia la possibilità di scegliere fra due negozi ove effettuare le sue provviste; i prezzi indicati sulle merci esposte nelle due vetrine differiscono un poco per ogni articolo. Precisamente, il vettore dei prezzi relativi al secondo negozio risulti:

$$y = \begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ 65 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{lire ogni mela} \\ \text{lire ogni uovo} \\ \text{lire ogni limone} \\ \text{lire ogni arancia} \\ \text{lire ogni pera.} \end{array}$$

Rossi è libero ora di scegliere fra queste tre alternative: fare tutti gli acquisti presso il primo negozio, oppure fare tutti gli acquisti presso il secondo, oppure comperare ciò che desidera di ogni qualità di merce presso il negozio dove questa costi meno. Per aiutarlo a decidere nel modo piú conveniente, consideriamo la seguente matrice:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Prezzi in lire,} & \text{Prezzi in lire,} & \text{Prezzo} \\ \text{I negozio} & \text{II negozio} & \text{minimo} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 35 & 30 \\ 40 & 35 & 35 \\ 60 & 65 & 60 \\ 35 & 30 & 30 \\ 50 & 45 & 45 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Gli elementi della prima colonna della precedente tabella riguardano i prezzi, in lire, vigenti nel primo negozio, gli elementi della seconda quelli vigenti nel secondo e gli elementi della terza i valori minimi dei prezzi corrispondenti ad una medesima merce nell'uno e nell'altro negozio. Per calcolare l'entità della spesa che Rossi dovrebbe sostenere in relazione a ciascuna delle alternative che si presentano, si può eseguire il seguente prodotto:

$$xP = (6, 12, 3, 12, 6)\begin{pmatrix} 30 & 35 & 30 \\ 40 & 35 & 35 \\ 60 & 65 & 60 \\ 35 & 30 & 30 \\ 50 & 45 & 45 \end{pmatrix} = (1.620, 1.455, 1.410).$$

Si vede allora chiaramente che la spesa di Rossi sarà di 1.620 lire se egli comprerà tutto ciò che gli occorre presso il primo negozio, di 1.455 lire se egli comprerà tutto ciò che gli occorre presso il secondo negozio e di 1.410 lire se egli comprerà ciascun articolo presso quello dei due negozi in cui esso sia meno costoso (mele e limoni, nel primo e il resto nel secondo).

Ovviamente ciò che Rossi farà dipende dalle circostanze. Se entrambi questi negozi di cui abbiamo parlato sono abbastanza comodi da raggiungere per lui, è molto probabile che egli scelga la terza alternativa, che è pure la piú conveniente; se il primo negozio è vicino, mentre il secondo è all'altro capo della città, egli acquisterà ogni cosa in quello piú prossimo; e, probabilmente, si rifornirà interamente nel secondo negozio, se il primo è troppo lontano e non riterrà opportuno fare tanta strada per risparmiare 45 lire!

L'esempio che abbiamo testé illustrato è un tipico *problema di decisione*. Cosí infatti sono chiamati quei problemi nei quali è necessario procedere ad una scelta fra diversi modi di agire, ossia fra piú *strategie*. In generale, è sempre possibile valutare il *valore* di ogni strategia siffatta e chi deve risolvere un problema del tipo su indicato sceglie una strategia avente valore piú grande possibile.

Talvolta il valore di un'azione va valutato in termini psicologici e morali; si parla allora, piú propriamente, di *utilità* di una strategia. Lo stesso carattere, e gli scopi che ci siamo prefissi di conseguire con il contenuto di questo volume, in un certo senso implicano che qui l'*utilità*, la convenienza, di una strategia sia sempre espressa in termini di guadagno monetario; ciò consente, fra l'altro, di poter confrontare i valori di due possibili metodi d'azione da parte di chi deve prendere una decisione, o fare una scelta.

Esempio 4. — Ecco un altro esempio di problema di decisione. Un'urna contiene cinque palline rosse, tre verdi ed una bianca; estratta a caso una pallina, si procede all'assegnazione di piccoli gettoni d'oro, ciascuno del valore nominale di mille lire, ai possessori dei biglietti di tre tipi, A, B e C, di una lotteria indetta da un ente di beneficenza, secondo le regole riassunte nella seguente tabella:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Biglietto} & \text{Biglietto} & \text{Biglietto} \\ \text{tipo } A & \text{tipo } B & \text{tipo } C \end{array} \\ \text{pallina} & \qquad\text{gettoni assegnati} \\ M = \begin{array}{l} \text{rossa} \\ \text{verde} \\ \text{bianca} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ossia, se viene estratta una pallina rossa, i possessori di un biglietto di tipo A riceveranno un gettore, quelli di un biglietto di tipo B tre gettoni e nessun gettone quelli di un biglietto di tipo C; se la pallina estratta sarà verde, i possessori di biglietti dei tre tipi riceveranno rispettivamente quattro, uno e zero gettoni; infine, se verrà estratta la pallina bianca, i possessori di un biglietto di tipo C riceveranno sedici gettoni, ma gli altri non riceveranno nulla. Che tipo di biglietti sarebbe preferibile possedere?

La risposta a questo interrogativo dipende fondamentalmente dal concetto di speranza matematica introdotto ed illustrato nel precedente capitolo. Alle proposizioni "è estratta una pallina rossa", "è estratta una pallina verde" ed "è estratta la pallina bianca" corrispondono probabilità ordinatamente eguali a 5/9, 3/9 e 1/9; e, in virtú delle considerazioni dianzi sviluppate, nel medesimo capitolo indicato poco fa, questi valori di probabilità consentono di risalire alla determinazione della speranza matematica dei possessori di un biglietto della lotteria di ciascuno dei tre tipi considerati. Tuttavia, ai medesimi risultati si può pervenire, in modo altrettanto rapido e rigoroso, attraverso il calcolo del prodotto pM, essendo p il vettore

di probabilità:

$$p = \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

Cosí facendo, si ottiene successivamente:

$$pM = \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{9}, \frac{1}{9}\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(1\cdot\frac{5}{9} + 4\cdot\frac{3}{9} + 0\cdot\frac{1}{9},\ 3\cdot\frac{5}{9} + 1\cdot\frac{3}{9} + 0\cdot\frac{1}{9},\ 0\cdot\frac{5}{9} + 0\cdot\frac{3}{9} + 16\cdot\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \left(\frac{17}{9}, \frac{18}{9}, \frac{16}{9}\right).$$

È immediato riconoscere che le componenti del vettore pM sono le speranze matematiche dei possessori di un biglietto rispettivamente di tipo A, B e C; e, dai valori cosí ottenuti, risulta che i biglietti piú convenienti sono quelli di tipo B, poi quelli di tipo A ed infine quelli di tipo C.

Naturalmente, però, nel caso in cui i biglietti della lotteria in questione debbano essere comperati, è il loro costo a determinare quale sia in realtà il tipo piú conveniente. Per esempio, se ogni biglietto costasse tremila lire, sarebbe prudente non comperarne alcuno, perché si rischierebbe di rimetterci comunque. Se ogni biglietto costasse invece mille lire, sarebbe opportuno acquistarne di tipo B, perché per ciascuno di essi è lecito attendersi un guadagno di (2.000 — 1.000) lire, ossia di mille lire. Se i primi due biglietti vengono venduti al prezzo complessivo di duemilacento lire ed il terzo a quello di millecinquecento lire, converrebbe scegliere il tipo C, essendo l'unico che, in queste circostanze, possa condurre ad un guadagno pressoché sicuro.

Esercizi

1. Eseguire i seguenti prodotti indicati:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $(3, -4)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; [*R.* (11, —11).]

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ -8 & 14 & -5 \\ 9 & 2 & 7 \\ 10 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

d) $(2, 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; [*R.* (0, 0).]

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$;

f) $(0, 2, -3)\begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; [*R.* $(ax_1 + cx_2, bx_1 + dx_2)$.]

h) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$;

j) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice che compare nelle parti i) ed j) dell'esercizio precedente gode di una caratteristica analoga a quella posseduta da un particolare numero; qual è questa caratteristica e quale questo numero?

3. Dall'esercizio 1 d) risulta che il prodotto di un vettore-riga, avente tutte le componenti diverse dallo zero, per una matrice, anch'essa con elementi tutti diversi dallo zero, può dare come risultato il vettore-riga nullo. Trovare qualche altro analogo esempio. Risolvere lo stesso problema, riferendosi all'esercizio 1 e).

4. Risolvere, quando sia possibile, i seguenti problemi:

a) determinare il vettore x, sapendo che $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = (7, 0)$; [*R.* (3, 1).]

b) sapendo che $(2, -1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (6, 3)$, determinare la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e dire se il problema può ammettere piú di una soluzione;

c) determinare il vettore u tale che $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

d) determinare il vettore u tale che $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

e dire quante soluzioni si possono trovare.

[*R.* u. $\begin{pmatrix} 4k-3 \\ k \end{pmatrix}$, essendo k un numero arbitrario.]

5. Calcolare le quantità numeriche sotto indicate e interpretare convenientemente ciascuna di esse.

a) Sia $(1, -1)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = a(1, -1)$; calcolare a. [*R.* $a = 2$.]

b) Sia $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; determinare u. Quante soluzioni si possono trovare? [*R.* $u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$, essendo k un numero arbitrario.]

c) Sia: $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; determinare u. Quante soluzioni si trovano?

6. Con riferimento all'esercizio 5 del paragrafo precedente, costruire la matrice di tipo (3, 5), gli elementi delle cui righe indichino i vari acquisti di Rossi, Brambilla e Bianchi. Si moltiplichi a destra tale matrice per il vettore-colonna a cinque componenti dei prezzi, allo scopo di determinare il vettore-colonna a tre componenti ciascuna delle quali esprime la spesa affrontata dai diversi amici. Si moltiplichi poi la medesima matrice a sinistra per il suddetto vettore dei prezzi, in modo da determinare la spesa sostenuta complessivamente dai tre amici.

7. Nell'esempio 1 di questo paragrafo, si supponga che il costruttore edile debba costruire sette case di stile rustico, tre di stile Cape Cod e cinque di stile coloniale. Calcolare di nuovo, applicando l'operazione prodotto di una matrice per un vettore, la spesa totale per le materie prime e ciò in due modi distinti, come è stato fatto nell'esempio sopra citato.

8. Nell'esempio 2 di questo paragrafo, si supponga che il vettore delle probabilità iniziali sia $p^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; determinare il vettore $p^{(1)}$. [*R.* $\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$.]

9. Si supponga che, per il processo di Markov la cui matrice di tran-

sizione è:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

il vettore delle probabilità iniziali sia $p^0 = (1/2,\ 1/6,\ 1/3)$. Disegnare l'albero del processo ed assegnare le misure albero. Calcolare $p^{(1)}$ attraverso la misura albero introdotta e anche mediante la formula $p^{(1)} = p^{(0)}P$ e verificare che i due risultati coincidono.

10. Si consideri il processo di Markov con due stati, la cui matrice di transizione è:

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

essendo a e b due numeri interi non negativi. Si supponga che il vettore delle probabilità iniziali sia:

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)},\ p_2^{(0)}),$$

essendo $p_1^{(0)}$ e $p_2^{(0)}$ la probabilità che si scelgano come stato iniziale rispettivamente lo stato 1 e lo stato 2. Ricavare le espressioni delle componenti del vettore $p^{(1)}$. [*R.* $p^{(1)} = [ap_1^{(0)} + (1-b)\,p_2^{(0)},\ (1-a)\,p_1^{(0)} + bp_2^{(0)}]$.]

11. Nell'esempio 2, applicare le misure albero per dimostrare che $p^{(2)} = p^{(1)}P$.

12. La seguente matrice schematizza le quantità di vitamine contenute in tre campioni di alimenti, espresse in un'opportuna unità di misura prefissata:

$$\begin{array}{l} \textit{Vitamina} \\ \textit{Primo elemento} \\ \textit{Secondo alimento} \\ \textit{Terzo alimento} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Se mangiamo cinque unità del primo alimento, dieci unità del secondo e otto del terzo, che quantità di ciascun tipo di vitamine ingeriamo? Se paghiamo ogni alimento soltanto per il suo contenuto di vitamine e le unità di ciascuna di esse costano rispettivamente 10, 20, 25 e 50 lire, qual è il costo di ogni unità di ciascun tipo di alimento? Calcolare in due modi distinti il costo totale degli alimenti consumati.

[*R.* $(6{,}3,\ 3{,}3,\ 3{,}6,\ 5{,}0)$, $\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 33 \end{pmatrix}$, 469 lire.]

13. Con riferimento all'esempio 3 di questo stesso paragrafo, si determini di quanto dovrebbe venire abbassato il costo delle arance presso il primo negozio, affinché Rossi notasse una convenienza a fare in questo tutte le sue spese.

14. Con riferimento all'esempio 3 di questo stesso paragrafo, si determini in quale dei due negozi Rossi spende meno dovendo effettuare compere che possono essere cosí schematizzate:

a) $x = (4,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1)$,
[*R.* Nel primo negozio, dove egli spenderà 330 lire.]
b) $x = (2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 0)$,
c) $x = (2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0)$.

15. Con riferimento all'esempio 4 di questo stesso paragrafo, si supponga la probabilità che un tale si procuri un biglietto della lotteria di tipo A, oppure di tipo B, oppure di tipo C valga rispettivamente r_1, oppure r_2, oppure r_3. Si interpreti convenientemente il prodotto pMr, essendo

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Si proceda poi ad un calcolo effettivo di tale prodotto, quando sia $r_1 = r_2 = r_3$.
[*R. parziale.* $pMr = 17/9$; tale risultato coincide con il valore medio.]

*16. I dirigenti di un complesso industriale si propongono di stabilire quale sia il piú conveniente fra tre possibili processi di produzione di tre prodotti, che indicheremo con A, B e C. La quantità di ogni prodotto ottenibile con ciascun procedimento risulta dalla seguente matrice:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{primo procedimento} \\ \text{secondo procedimento} \\ \text{terzo procedimento.} \end{array}$$

Se p denota un vettore le cui componenti esprimono ordinatamente i profitto relativo ad ogni unità di quantità di ciascun prodotto, quale significato assume il prodotto Rp? Si determinino tre vettori p, distinti fra loro, tali che in corrispondenza a ciascuno di essi sarebbe piú vantaggioso ricorrere ad un altro processo di produzione.

[*R. parziale.* Il terzo processo di produzione risulta il piú conveniente, se è $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.]

*17. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix};$$

a) dimostrare che la scrittura $Ax = b$ equivale ad un sistema di due equazioni lineari in due incognite.

b) dimostrare che ogni sistema di due equazioni lineari in due incognite può essere scritto nella forma $Ax = b$, pur di scegliere convenientemente le matrici A e b.

*18. Si considerino le matrici:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che $Pf = f$.

*19. Sia P la matrice di probabilità relativa ad una catena di Markov ad n stati e si consideri una matrice-colonna i cui elementi siano tutti eguali ad 1. Detta f quest'ultima matrice, si dimostri che $Pf = f$. (*Suggerimento.* Il precedente esercizio 18 è un caso particolare di questo.)

20. Si dimostri che, se $Ax = 0$ ed $Ay = 0$, allora $A(x + y) = 0$.

21. Si dimostri che, se $Ax = b$ ed $Ay = 0$, allora $A(x + y) = b$.

4. *Somma e prodotto di matrici*

La somma di due matrici di uguale tipo, ossia aventi lo stesso numero di righe e di colonne, si ottiene addizionando gli elementi corrispondenti. Per esempio, se A e B sono due matrici di tipo (2, 3), avremo:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

Si noti che la somma di due vettori (riga oppure colonna) è un caso particolare della somma di due matrici. Ecco alcuni esempi numerici di somma di matrici:

$$(1, 0, -2) + (0, 5, 0) = (1, 5, -2),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Altri esempi si presenteranno negli esercizi. Il lettore noti che ***non*** sommiamo mai matrici di tipi diversi.

Se A è una matrice e k un numero qualunque, la matrice kA si definisce:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che questo prodotto si riduce ad una semplice moltiplicazione per k degli elementi della matrice, come avveniva quando l'analogo concetto era stato introdotto nel caso dei vettori. Sono esempi di prodotto di matrici per costanti:

$$-2 \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 4 & -16 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix};$$
$$6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto di un vettore per un numero è, naturalmente, un caso particolare del prodotto di una matrice per un numero.

In opportune condizioni, è possibile anche eseguire il prodotto di due matrici: il risultato è allora una nuova matrice. Ad esempio, se A è una matrice di tipo (2, 3) e B è una matrice di tipo (3, 2), il prodotto AB è dato dall'espressione:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Si noti che tale prodotto è una matrice quadrata del secondo ordine e inoltre che ciascun elemento di essa è la somma dei prodotti degli elementi di una riga di A per i corrispondenti elementi di una colonna