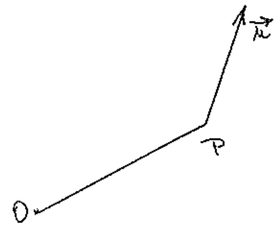
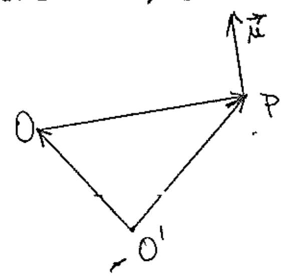
Nelle applicazioni industriali è importante introdurre anche un'altra unità derivata da quella del lavoro e precisamente la potenza meccanica definita come rapporto fra lavoro compiuto ed intervallo di tempo in cui è stato fatto. Abbiamó : potenza = W = $\frac{\mathcal{L}}{t}$
Nei casi in cui il lavoro varia con continuità nel tempo è necessario introdurre il rapporto differenziale fra il lavoro $d\mathcal{L}$ e l'intervallo di tempo dt: $W=\frac{d\mathcal{L}}{dt}$. Diciamo piuttosto rapporto differenziale che derivata rispetto il tempo per quanto se conosciamo $\mathcal{L}$ in funzione del tempo per calcolare W si farà proprio la derivata $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$
Data la sua importanza pratica all' unità di potenza viene dato un nome ; risulta potenza unitaria il watt che corrisponde al rapporto fra il lavoro di un joule ed un secondo. Le dimensioni sono $[L]^2[M][T]^{-3}$
E' molto usato il multiplo chilowatt, indicato con kW ed uguale a 10^3 watt e più recentemente il megawatt MW, uguale a 10^6 watt.
Nel sistema pratico per ragioni storiche l' unità di potenza è quella corrispondente al lavoro di 75 chilogrammetri fatto in un secondo e viene chiamato cavallo vapore, simbolicamente CV. Storicamente esso è legato all' introduzione delle prime macchine a vapore; intuitivamente si avrà una potenza di 1 CV quando si è in grado di sollevare verticalmente 75 kgp in un secondo. Essendo un chilogrammetro uguale a 9,8 joule sarà 1 CV = 9,8 x 75 watt = 735 watt. Viceversa risulta 1 kW = 1,36 CV. E' interessante notare come essendo piccola la potenza di un watt rispetto alle potenze sviluppate dalle macchine più comuni, sarà piccola in tal senso anche l' unità di lavoro di 1 joule. Invece di prendere multipli decimali del joule si preferisce usare dei multipli ricavati dal seguente criterio. Si abbia una macchina che assorbe o produce la potenza costante di un chilowatt; se tale macchina lavora per un' ora essa assorbe o produce un lavoro di un chilowatt x 1 ora = 1 kW x 3.600 sec. = $\frac{10^3\ \text{joule}}{1\ \text{sec}} \times 3600\ \text{sec} = 3{,}6 \cdot 10^6$ joule
Il chilowatt ora (1 kWh) corrisponde quindi 3,6 x 10^6 joule; usato anche il watt ora corrispondente ovviamente a 3,6 x 10^3 joule. La praticità di tale unità deriva dal fatto che normalmente le potenze assorbite o prodotte dalla macchina vengono indicate dai costruttori e risulta pertanto immediato calcolare il lavoro assorbito o prodotto in un certo tempo semplicemente moltiplicando il tempo in ore di utilizzo per la potenza nominale.

Teorema del momento della quantita' di moto.

Il teorema del momento della quantita' di moto é una conseguenza meno diretta del secondo Principio della dinamica poiché esso deriva dal teorema dell'impulso opportunamente esteso dall'introduzione dei concetti di momento di una forza e momento della quantita' di moto. Tali concetti rientrano nella categoria piu' vasta di momento di un vettore rispetto ad un punto. Sia $\vec{\mu}$ un vettore qualsiasi ed O un punto non appartenente alla retta di azione di $\vec{\mu}$



Sia P il punto di applicazione del vettore $\vec{\mu}$. Definiamo come momento di $\vec{\mu}$ rispetto al punto O il seguente prodotto vettoriale : $\vec{M}_o = (P-O)\wedge\vec{\mu}$
L'indice O in basso sta' a ricordare il punto rispetto al quale M_o é stato calcolato. Osserviamo anzitutto che il vettore $\vec{M}_o$, contrariamente ad $\vec{\mu}$, non é un vettore applicato in nessun punto particolare nello spazio. Dalla definizione del prodotto vettoriale abbiamo che il modulo é dato da : $|\vec{M}_o| = |P-O| \times |\vec{\mu}| \times \operatorname{sen}\vartheta$, il cui significato geometrico é dato dall'area del parallelogramma costruito sui lati PO ed $|\vec{\mu}|$. Da cio' consegue l'importante proprieta' che $\vec{M}_o$ non varia se il punto di applicazione P di $\vec{\mu}$ si sposta lungo la retta di azione di $\vec{\mu}$, fisso restando il punto O. $\vec{M}_o$ risulta inoltre ortogonale ai vettori (P - O) ed $\vec{\mu}$ e quindi al piano da essi individuato. Supposto ora di mantenere fisso il punto P vogliamo vedere come varia il momento $\vec{M}_o$ al variare di O. Sia pertanto O' un punto distinto da O; risulta dalla definizione : $\vec{M}_{O'} = (P-O')\wedge\vec{\mu}$



Dalla figura osserviamo che :

$(P-O') = (P-O)+(O-O')$ per cui

$$\vec{M}_{O'} = (P-O)\wedge\vec{\mu} + (O-O')\wedge\vec{\mu}$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_o + (O-O')\wedge\vec{\mu} .$$

Questa relazione é importante quando si estende il concetto di momento ad un sistema di più vettori $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots \vec{\mu}_n$ applicati rispettivamente ai punti $P_1, P_2, P_3 \dots\dots\dots P_n$. Sia di nuovo O un punto di riferimento, scelto arbitrariamente. Avremo quindi tanti momenti $\vec{M}_0^{(1)}, \vec{M}_0^{(2)}, \dots\dots \vec{M}_0^{(n)}$ calcolati rispetto ad O con la definizione data. Sarà naturale definire come momento risultante $\vec{M}_{0n}$ la somma vettoriale

$$\vec{M}_{0n} = \vec{M}_0^{(1)} + \vec{M}_0^{(2)} + \qquad \vec{M}_0^{(n)} = (P_1 - O) \wedge \vec{\mu}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{\mu}_2 + \qquad (P_n - O) \wedge \vec{\mu}_n = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{\mu}_i$$

Passando dal punto O ad un altro O' abbiamo:

$$\vec{M}_{0'} = (P_1 - O) \wedge \vec{\mu}_1 + (O - O') \wedge \vec{\mu}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{\mu}_2 + (O - O') \wedge \vec{\mu}_2 + \qquad + (P_n - O) \wedge \vec{\mu}_n + (O - O') \wedge \vec{\mu}_n$$

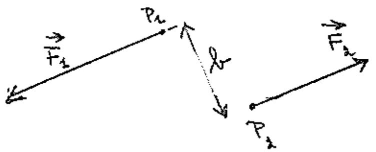
$$\vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{\mu}_i + (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{\mu}_i$$

Indichiamo con $\vec{R}$ la somma vettoriale $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mu}_i$ per cui avremo:

$$\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0 + (O - O') \wedge \vec{R}$$

Particolarmente importante é il caso in cui $\vec{R} = 0$ perché in tal caso $\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0$ per cui, data l'arbitrarietà dei punti O, O' si ha l'importante proprietà che il momento totale di un sistema di vettori a risultante nulla (norma vettoriale nulla) é indipendente dal punto di riferimento O rispetto al quale viene calcolato; esso risulta quindi una proprietà intrinseca del sistemà di vettori dato. Questo risultato é molto importante nel caso ché i vettori dati siano delle forze.

In un sistema di forze la cui risultante é nulla, il momento totale del sistema di forze é indipendente dal punto di riferimento rispetto al quale viene applicato. Ciò é importante in quei casi in cui si studia l'equilibrio dei corpi cioé la cosidetta statica dei sistemi materiali. Un caso particolarmente semplice ed interessante si ha quando vi sono solo due forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, uguali e contrarie i cui punti di applicazione però si trovano su due rette parallele ma distinte. Tale sistema costituisce una coppia di forze.



Sia b la distanza minima fra le due rette di applicazione. Essendo $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ovviamente $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

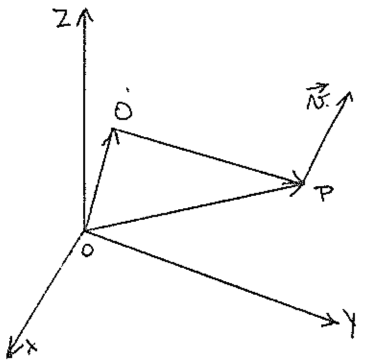
Calcoliamo il momento totale $\vec{M}_c$ (momento della coppie di forze); come punto di riferimento per il calcolo possiamo prendere un punto qualsiasi, dato che $\vec{R} = 0$. Pertanto prendiamo P_1 (o P_2) come punto di riferimento in modo che uno dei due momenti parziali sia nullo.

Sarà : $\vec{M}_c = (P_2 - P_1) \wedge \vec{F}_2 = (P_1 - P_2) \wedge \vec{F}_1$.

Tale momento risulta ortogonale al piano individuato dalla coppia di forze ed il suo modulo é uguale al prodotto del modulo di $\vec{F}_1$ (o $\vec{F}$) per la distanza minima b fra le due rette d'azione; $|\vec{M}_c| = F \cdot b$, essendo $F = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$. Quindi si può ottenere lo stesso momento della coppia variando F e b in modo che il prodotto sia costante .

L'esperienza ed anche l'intuizione ci dice che l'effetto di una coppia di forze é quello di porre in rotazione il corpo al quale la coppia stessa viene applicata. Più in generale vedremo che l'esistenza di momenti non nulli é responsabile dei moti rotatori dei corpi.

Riprendendo in esame la relazione, data dal teorema dell'impulso, $\vec{F} dt = d(m\vec{v})$, possiamo fare le seguenti considerazioni. Si scelga un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e sia O' un punto fisso ma distinto da l'origine O del sistema di riferimento.



Se moltiplichiamo vettorialmente a sinistra, ambo i membri della relazione precedente (P - O') otteniamo:

$$(P - O') \wedge \vec{F} dt = (P - O') \wedge d(m\vec{v})$$

dove P rappresenta un punto materiale di massa m e velocita $\vec{v}$. Chiameremo momento dell'impulso $\vec{\mu}$, rispetto ad O', il prodotto vettoriale

$$d\vec{\mu} = (P - O') \wedge \vec{F} dt$$

Osserviamo ancora quanto segue:

$$(P - O') \wedge d(m\vec{v}) = d[(P - O') \wedge m\vec{v}] - d[(P - O')] \wedge m\vec{v} \quad \text{poiché}$$

$$d[(P - O') \wedge m\vec{v}] = (P - O') \wedge d(m\vec{v}) + d[(P - O')] \wedge m\vec{v}$$

Risulta però anche: $(P-O) = (P-O') + (O'-O)$ per qui si ha: $d(P-O') = d(P-O) - d(O'-O)$ ed essendo O' ed O punti fissi, $(O'-O)$ é un vettore costante e quindi $d(O'-O) = 0$ e $d(P-O') = d(P-O)$. Ricordando che $d(P-O) = dP = \vec{v}dt$, risulta $d(P-O)$ parallelo a $\vec{v}$ per cui:

$$(P-O')\wedge d(m\vec{v}) = d[(P-O')\wedge m\vec{v}] - d[(P-O')]\wedge m\vec{v} =$$
$$= d[(P-O')\wedge m\vec{v}] - \underbrace{d[(P-O)]\wedge m\vec{v}}_{=0} = d[(P-O')\wedge m\vec{v}]$$

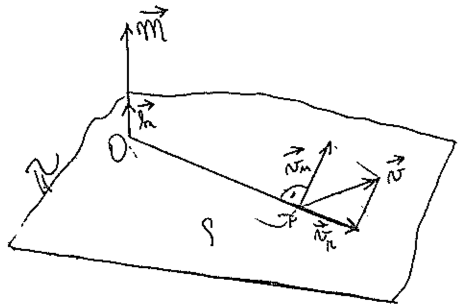
Al vettore $\vec{\mathfrak{M}} = (P-O')\wedge m\vec{v}$ viene dato il nome di momento angolare del punto P (o momento della quantità di moto) rispetto ad O'. Per quanto visto risulta quindi $d\vec{\mu} = d\vec{\mathfrak{M}}$; ciò esprime il teorema del momento dell'impulso il quale ci dice che il momento elementare dell'impulso di una forza $\vec{F}$, calcolato rispetto ad un punto O' arbitrario, risulta uguale alla variazione infinitesima del momento angolare $\vec{\mathfrak{M}}$, calcolato rispetto allo stesso punto O'. Dalla relazione $d\vec{\mu} = (P-O')\wedge\vec{F}dt = d\vec{\mathfrak{M}}$ dividendo per dt otteniamo:

$$(P-O')\wedge\vec{F} = \frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt}$$

che esprime il teorema del momento angolare (momento della quantità di moto). Esso ci dice che il momento di una forza $\vec{F}$, rispetto ad un punto qualsiasi é uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare calcolato rispetto allo stesso punto. Pensando la relazione $\vec{F} = m\vec{a}$ scritta sotto la forma $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ valida per massa costante m, si ha l'enunciato per cui la forza é uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto; perciò é facile ricordare l'enunciato del teorema del momento angolare sostituendo alla forza il momento della forza ed alla quantità di moto il momento della quantità di moto, precisando però il punto (del resto arbitrario) rispetto al quale i momenti rispettivi sono calcolati. Vediamo subito un'applicazione tanto semplice quanto notevole del teorema del momento angolare.

Si abbia il caso in cui la forza $\vec{F}$ é sempre parallela al vettore $(P-O')$; ciò significa che essa é diretta sempre verso un punto fisso e pertanto costituisce il caso molto importante delle forze cosidette "centrali". Risulta allora $(P-O')\wedge\vec{F} = 0$ perché vettori paralleli e pertanto sarà anche: $\frac{d\vec{\mathfrak{M}}}{dt} = 0$ e risulterà $\vec{\mathfrak{M}} = \text{cost.}$

Si ha pertanto il risultato importante che nel caso di forze centrali <u>qualsiasi</u> sia la dipendenza dell'intensità della forza dalla distanza dal centro di forza, il moto del punto materiale avviene in modo da conservare il momento angolare cioé é un vettore costante nel tempo. È proprio questo il caso del moto dei pianeti attorno al Sole; infatti essendo l'accelerazione puramente normale, tale sarà anche la forza di attrazione, per il II° Principio della Dinamica. Vediamo quali sono le conseguenze della conservazione del momento angolare. Anzitutto, indicata con $\vec{v}$ la velocità di P, sarà: $\vec{\mathfrak{M}} = (P-O)\wedge m\vec{v} = \text{cost}$ e quindi il moto é tale per cui $\vec{v}$ é sempre ortogonale al vettore $\vec{\mathfrak{M}}$ costante. (Si é indicato con O il punto di riferimento del momento angolare e della forza, coincidente con il centro della forza). Dalla costanza di $\vec{\mathfrak{M}}$ si deduce che il moto deve svolgersi in un piano fisso, ortogonale al vettore $\vec{\mathfrak{M}}$. Sia π tale piano; il vettore $\vec{v}$ si può sempre decomporre in un termine radiale $\vec{v}_r$ ed uno normale $\vec{v}_n$ rispetto ad un sistema di coordinate polari nel piano π avente polo il punto O.



Sarà anche: $m\vec{v} = m\vec{v}_r + m\vec{v}_n$ e quindi $\vec{\mathfrak{M}} = (P-O)\wedge m\vec{v} =$

$$= (P-O)\wedge m\vec{v}_r + (P-O)\wedge m\vec{v}_n =$$

$$= (P-O)\wedge m\vec{v}_n$$

perché il primo termine é nullo in quanto $(P-O)$ e $\vec{v}_r$ sono paralleli tra di loro. Indicato con ϱ il modulo di $(P-O)$ sappiamo che $|\vec{v}_n| = \varrho\frac{d\vartheta}{dt}$ dove ϑ é l'anomalia di P misurata rispetto ad un asse arbitrario. Pertanto: $|\vec{\mathfrak{M}}| = \varrho m \varrho\frac{d\vartheta}{dt} = m\varrho^2\frac{d\vartheta}{dt}$ essendo $\vec{v}_n$ ortogonale sempre a $(P-O)$.

Ricordando che $\varrho^2\frac{d\vartheta}{dt} = 2\frac{dA}{dt}$ cioé due volte la velocità areale, concludiamo che: $|\vec{\mathfrak{M}}| = 2\frac{dA}{dt}$ e $\vec{\mathfrak{M}} = 2\frac{dA}{dt}\vec{k} = \text{cost}$ avendo indicato con $\vec{k}$ un versore normale al piano π.

Pertanto concludiamo che, nel caso di forze centrali, il moto é tale per cui é valida la I^{a} legge di Keplero sulla costanza della velocità areale del moto di un pianeta attorno al Sole. Ripetiamo che la validità della I legge di Keplero é legata al fatto cha la forza esercitata dal Sole é sempre diretta verso il centro del medesimo, mentre l'orbita ellittica é una conseguenza della proporzionalità all'inverso del quadrato della distanza. Pianeta - Sole. Osserviamo che il teorema del momento angolare, nel caso di forze centrali, non ci dice ancora nulla nel tipo di traiettoria seguito dal punto materiale. Per trovare l'equazione del moto in linea di principio, é sufficiente integrare l'equazione vettoriale $(P - O)\wedge m\vec{v} = \text{cost.}$ equivalente a tre equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

La costanza di $\vec{\mathcal{M}}$ riduce di un ordine le equazioni generali della Dinamica per cui si dice che la costanza di $\vec{\mathcal{M}}$, o anche conservazione del momento angolare, costituisce un integrale primo del moto nel senso che é sufficiente un 'integrazione per risolvere il problema del moto; in sostanza stabilisce che $\vec{\mathcal{M}} = \text{cost.}$ equivale ad aver già fatto una integrazione delle equazioni del moto. È ovvio quindi che uno dei problemi fondamentali della Dinamica sia quello di ricercare l'esistenza possibile di altri casi di integrali primi del moto. Ritornando al caso generale, vediamo cosa succede qualora il punto O', centro di riferimento per il calcolo dei momenti, non sia un punto fisso ma possieda a sua volta una velocità $\vec{V}$ rispetto alla terna di riferimento, supposta inerziale. Essendo O l'origine fissa di questa terna, avremo;

$$(P-O)\wedge m\vec{v} = (P-O')\wedge m\vec{v} + (O'-O)\wedge m\vec{v}$$

cioé: $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_{O'} + (O'-O)\wedge m\vec{v}$

Abbiamo ancora: $(P-O')\wedge d(m\vec{v}) = d[(P-O')\wedge m\vec{v}] - d[(P-O')]\wedge m\vec{v} =$

$= d[(P-O')\wedge m\vec{v}] - dP\wedge m\vec{v} + dO'\wedge m\vec{v}.$

in quanto O' non é piu un punto fisso.

Ricordando quindi che: $(P-O')\wedge d(m\vec{v}) = (P-O')\wedge \vec{F}dt$

abbiamo: $(P-O')\wedge\vec{F} = \frac{d}{dt}[(P-O')\wedge m\vec{v}] - \frac{dP}{dt}\wedge m\vec{v} + \frac{dO'}{dt}\wedge m\vec{v}$

Risulta inoltre $\frac{dP}{dt} = \vec{v}$ per cui $\frac{dP}{dt}\wedge m\vec{v} = 0$ e $\frac{dO'}{dt} = \vec{V}$ per definizione.

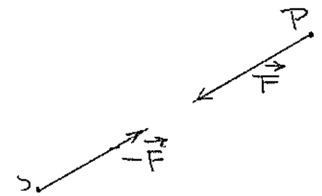
In definitiva abbiamo l'estensione del teorema del momento angolare, quando il punto di riferimento O' si muove con velocità $\vec{V}$ rispetto ad una terna di assi inerziali; esso si esprime mediante l'equazione vettoriale:

$$(P-O')\wedge\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{M}}_{O'} + \vec{V}\wedge m\vec{v}$$

che si riduce al caso precedente se $\vec{V} = 0$ oppure se risulta sempre $\vec{V}$ parellelo a $\vec{v}$.

III° Principio della Dinamica.

L'applicazione dei primi due Principi della Dinamica é sufficiente a risolvere, a parte difficoltà matematichè, un qualsiasi problema di moto di un punto materiale qualora sia nota la risultante $\vec{F}$ delle forze applicate al punto stesso. A questo punto ci si può chiedere come si fa ad applicare una data forza $\vec{F}$ ad un punto materiale; la domanda non é banale e Newton fu il primo a rendersene conto. Egli intuichè, indipendentemente dallo stato di moto del punto materiale, l'applicazione di $\vec{F}$, implica necessariamente l'applicazione di un altra forza $-\vec{F}$ uguale in modulo, ma di verso opposto ed applicata in un punto distinto dal punto di applicazione di $\vec{F}$, appartenente però alla retta d'azione di $\vec{F}$. E' interessante notare come Newton giunse a questa conclusione proprio studiando il moto dei pianeti attorno al Sole; é infatti in questo caso che il problema si presenta nella sua forma più semplice. Dovendo ammettere che la causa del moto del pianeta attorno al Sole sia una forza diretta verso il centro del Sole (o semplicemente verso il Sole, data la enorme distanza dei pianeti dal Sole), Newton poté giungere ad una formulazione più generale di questa forza soltanto facendo l'ipotesi che la stessa forza, di verso opposto, è applicata al Sole (al centro del Sole o più precisamente nel baricentro del sistema pianeta-Sole) ed é dovuta al pianeta.



Pertanto il moto apparente del Sole attorno alla terra é dovuto alla stessa forza, a parte il verso. A tali forze é stato dato il nome di azione e reazione per cui, con una dizione impropria ma