LEZIONE 6

Come si fa a vedere se $v_1, \dots, v_s \in V$ sono LIN. INDIP. o meno?

ESEMPIO $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ $v_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ -12 \\ -10 \end{vmatrix}$

- $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow v_1$ è lin. indip. $\lambda v_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}}$ SPIEG.
- v_1, v_2 saranno lin. dip. $\Leftrightarrow v_2 = \mu v_1$ per un certo $\mu \in \mathbb{R}$

$\mu v_1 = \mu \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\mu \\ 0 \\ \mu \end{vmatrix} = v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ impossibile!

Allora v_1, v_2 sono linearmente indip.

- v_1, v_2, v_3 saranno lin. dip $\Leftrightarrow v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ per opportuni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -12 \\ -10 \end{vmatrix} = v_3$

Se λ_1, λ_2 esistono, allora $\lambda_2 = -6 \Rightarrow$ $3\lambda_1 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$; $2 + 2(-6) = 2 - 12 = -10$

Quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. dip., dunque non sono lin. indip. OSS. Abbiamo implicitamente usato il fatto che la nozione di indip. lineare non dipende dall'ordine in cui si prendono i vettori

[METODO "BUON SENSO"; richiede occhio e dati preconfezionati.

Abbiamo trovato che $2v_1 - 6v_2 = v_3$, ovvero

0) $2v_1 - 6v_2 - 1 \cdot v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Altro modo di risolvere il PBL: applicare direttam. la definizione di lin. indip. Si parte, allora, da

1) $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ Si cercano tutte le possibili terne $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

che verificano (1). Poi si vede che cosa succede e si decide.
Cioè (1) viene pensata come equazione e x_1, x_2, x_3 sono le incognite.

$(x_1, x_2, x_3) = (2, -6, -1)$ è una soluzione di (1)

Un'altra soluzione di (1) è $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.

Più in generale, se $\lambda \in \mathbb{R}$ è qualsiasi, allora $(x_1, x_2, x_3) = (2\lambda, -6\lambda, -\lambda) = \lambda(2, -6, -1)$ è ancora soluzione di (1).

Ci sono altre soluzioni di (1) ?

Sia $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ soluzione di (1), qualsiasi.

~~Se $\lambda_3 = 0$ allora $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = -\lambda_3 v_3 = 0 \cdot v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$~~

~~Ma v_1, v_2 lin. indip. $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.~~

~~Cioè $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ se $\lambda_3 = 0$ sol. già nota.~~

~~Quindi posso supporre $\lambda_3 \neq 0$.~~ Allora

$$
\left.\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = -\lambda_3 v_3 \\
(0) &\Rightarrow -2\lambda_3 v_1 + 6\lambda_3 v_2 = -\lambda_3 v_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_3) v_1 + (\lambda_2 + 6\lambda_3) v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}
$$

lin. indip.

$$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\lambda_1 = -2\lambda_3 \qquad\qquad \lambda_2 = +6\lambda_3$$

Riassumendo $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-2\lambda_3, +6\lambda_3, +1\cdot\lambda_3) = -\lambda_3(2, -6, -1)$

Dunque:

tutte e sole le soluzioni di (1) sono del tipo

$\mu(2, -6, -1)$ per $\mu \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO # (già fatto...)

$v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^n$ arbitrari (se si vuole, provare a ragionare in un qualsiasi spazio vettoriale V).

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_q v_q \mid \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}}_{\text{variano in tutti i modi possibili}}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. $\{v_1, \dots, v_q\}$ è un insieme di generatori per U

Questo esercizio mi dice che l'insieme di tutte le soluzioni di (1) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, generato dall'unico vettore $(2, -6, -1)$.

~ o ~ o ~

Proviamo ad esaminare una situazione generale.

V spazio vettoriale qualsiasi.

$v_1, \dots, v_n \in V$ vettori fissati. Consideriamo

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V}_{(2)}\} \subset \mathbb{R}^n$$

SPIEG.

- $(0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n} \in T$ banale
- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in T$ arbitrari.

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n) = \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)}_{\in T \ ?} \text{ in } \mathbb{R}^n$$

SI ⟸

SPIEG.

$$(\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) v_n = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}_{=0} + \underbrace{\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n}_{=0} \overset{?}{=} 0$$

- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in T$, $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrari $\quad \in T$? SI

$$\mu(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu\lambda_1, \dots, \mu\lambda_n) \text{ in } \mathbb{R}^n$$

proviamo:

SPIEG 26/9/17 (4)

$$\mu\lambda_1 v_1 + \ldots + \mu\lambda_n v_n \overset{\downarrow}{=} \mu(\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n}_{=0_V}) = 0_V$$

Quindi <u>T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.</u>

<u>Caso particolare</u> $V = \mathbb{R}^m$

$$v_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{vmatrix} \qquad v_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{vmatrix} \qquad \ldots \qquad v_n = \begin{vmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0_V \iff x_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 a_{11} \\ x_1 a_{21} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n a_{1n} \\ x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\iff (*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sistema formato da **m** equazioni <u>lineari</u> (cioè di grado 1), nelle **n** incognite $x_1, \ldots, x_n$

questi sono i "termini noti"; sono tutti <u>nulli</u>

Un tale <u>sistema lineare</u> si dice <u>omogeneo</u>.

T è l'insieme di tutte le sue soluzioni

$0 \in T \Rightarrow$ un SLO ha sempre soluzioni

è sempre <u>compatibile</u>

FATTO QUALITATIVO

L'insieme di tutte le soluzioni di un qualsiasi SLO di m equazioni in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

Cerco un sistema efficiente per scrivere tali soluzioni.

ESEMPIO

Considero il SLO : $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ 10x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ (3)

Lo riscrivo

$$x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}_{v_1} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{vmatrix}}_{v_2} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{vmatrix}}_{v_3} + x_4 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}}_{v_4} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$\boxed{v_4 = 3v_1}$ evidenti! $\to$ v_1, v_2 lin. indip

$v_3 \stackrel{?}{=} \lambda v_1 + \mu v_2$ $\quad \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{vmatrix}$ $\quad 10\mu = 5 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

$\lambda v_1 = v_3 - \frac{1}{2} v_2$ $\quad \lambda \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 \\ -5 \\ +\frac{5}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

$\boxed{v_3 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2}$ cioè $+\frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 v_4 = 0_{\mathbb{R}}$

cioè $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ è una soluzione di (3)

$-3v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow$ $(-3, 0, 0, 1)$ è un' altra soluzione di (3)

Considero adesso una qualsiasi soluzione di (3) sia $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Siccome l'insieme T di tutte le soluzioni di (3) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ho che anche

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \lambda_3\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) - \lambda_4(-3, 0, 0, 1) =$$ è soluz. di (3)

$$= \left(\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_3 + 3\lambda_4,\ \lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_3,\ \underbrace{\lambda_3 - \lambda_3}_{=0},\ \underbrace{\lambda_4 - \lambda_4}_{=0}\right)$$ quindi

$$\left(\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_3 + 3\lambda_4\right)v_1 + \left(\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_3\right)v_2 + \cancel{0v_3 + 0v_4} = 0_{\mathbb{R}^3}$$

lin. indip

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \qquad \lambda_2 + \tfrac{1}{2}\lambda_3 = 0$$

cioè

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\lambda_3 - 3\lambda_4 \qquad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}\lambda_3$$

Allora la nostra soluzione qualsiasi si può scrivere così:

$$\left(\tfrac{1}{2}\lambda_3 - 3\lambda_4,\ -\tfrac{1}{2}\lambda_3,\ \lambda_3,\ \lambda_4\right) = \boxtimes$$

(si chiamano parametri liberi. "Liberi" perché sono libero io di sceglierli a capocchia, come voglio, come mi serve, —

$\boxtimes$ si può interpretare anche così:

$$\boxtimes = \lambda_3\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 0\right)}_{s_1} + \lambda_4\underbrace{(-3, 0, 0, 1)}_{s_2}$$

$s_1, s_2 \in T$ cioè sono soluzioni di (3)

Ogni elemento di T si può scrivere come

combinazione lineare di s_1, s_2
ed <u>in un unico modo</u>. Questo è conseguenza
immediata di $s_1 = (\_\_, 1, 0)$ $s_2 = (\_\_, 0, 1)$

<u>ESERCIZIO</u> s_1, s_2 sono linearmente indipend.

Nell'esercizio (#): se $v_1, \ldots, v_q$ sono lin. indip., allora ogni vettore in U è comb. lineare di $v_1, \ldots, v_q$ in un unico modo.

<u>Dim.</u> Sia ~~u~~ $u \in U$. Suppongo che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_q v_q = u = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q. \quad \text{Allora}$$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_q v_q - \mu_1 v_1 - \ldots - \mu_q v_q = 0_V \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_q - \mu_q) v_q = 0_V \xrightarrow[v_1, \ldots, v_q \text{ lin. indip.}]{}$$

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \quad \ldots \quad \lambda_q - \mu_q = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\underline{\lambda_1 = \mu_1} \quad \ldots \quad \underline{\lambda_q = \mu_q} \quad \blacksquare$$

I ragionamenti che abbiamo fatto nel caso del SLO (3) si possono rifare, pressoché senza cambiamenti, per un qualsiasi SLO.

Se consideriamo un SLO qualsiasi (*) tutta l'informazione è contenuta nei coefficienti delle indeterminate, cioè nella tabella

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2ª riga

m-esima riga

1ª colonna

matrice di tipo $\underset{\#\text{ colonne}}{\overset{\#\text{ righe}}{m}} \times n$

Le equazioni del SLO sono legate alle righe di tale tabella. Ogni riga è un el.to di $\mathbb{R}^n$

Le indeterminate del SLO sono legate alle colonne. Ogni colonna è un element di $\mathbb{R}^m$