Laurea Magistrale in Matematica

Università degli Studi di Trieste
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2 - A

Appello d'esame del 18 Settembre 2017

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. Sia $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e sia $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la sottovarietà delle matrici invertibili. Nel seguito identifichiamo lo spazio tangente $T_M\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ con $T_M\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, $\forall M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (si ricordi che $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ è un aperto di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).

a) *(3 punti)* Si dimostri che, per ogni $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, la funzione

$$L_M \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,, \quad L_M(N) = M \cdot N$$

è un diffeomorfismo, dove $M \cdot N$ è il prodotto righe per colonne.

b) *(4 punti)* Sia $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = T_{I_2}\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, dove I_2 è la matrice unità. Sia $\xi_A \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\xi_A(M) = D_{I_2}L_M(A) \in T_M\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (dove $D_{I_2}L_M$ è il differenziale di L_M in I_2). Si dimostri che $\xi_A(M) = M \cdot A$. Si deduca che $v_A \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to T\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, definita come $v_A(M) = (M, \xi_A(M))$, è un campo vettoriale su $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

c) *(3 punti)* Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si scrivano le parentesi di Lie $[v_A, v_B]$ esplicitamente come combinazione lineare dei campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$, $i, j = 1, 2$ ($x_{ij}(M) = m_{ij}$, dove $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$).

d) *(4 punti)* Si dimostri che, $\forall A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $[v_A, v_B] = v_{[A,B]}$, dove $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ è il commutatore di A e B.

2. Si consideri lo spazio Euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$ con coordinate standard (x, y, z). Siano $P = (0, 0, 0), Q = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

a) *(4 punti)* Si determinino gli spazi di coomologia di de Rham $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\})$, per ogni k.

b) *(2 punti)* Si descriva l'anello di coomologia di de Rham di $\mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\}$.

c) *(4 punti)* Esiste una varietà differenziabile M, orientabile, di dimensione 2, ed omotopa ad $\mathbb{R}^3 \setminus \{P, Q\}$?

(Continua sul retro del foglio)

3. In $\mathbb{R}^4$ con coordinate standard (x, y, z, w), si consideri la forma differenziale

$$\omega = x\,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,w - y\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,w + z\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,w - w\,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)\,.$$

(a) *(2 punti)* Si calcoli il differenziale $\mathrm{d}\,\omega \in \Omega^4(\mathbb{R}^4)$.

(b) *(4 punti)* Sia S^3 la sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^4$, sia $i\colon S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ l'inclusione. Si dimostri che l'integrale $\int_{S^3} i^*\omega \neq 0$.
(*Suggerimento:* Si usi il teorema di Stokes per le varietà con bordo.)

(c) *(3 punti)* Si dica se $i^*\omega \in \Omega^3(S^3)$ è esatta oppure no.