1) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema lineare generale SL

$x_1, \dots, x_n$: le incognite

$b_1, \dots, b_m$: i termini noti

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i, \forall j$

Il problema è trovare tutte le n-ple $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ che verificano tutte le equazioni in (1). Una tale n-pla si chiama soluzione del SL (1).

Può benissimo capitare che un SL non abbia soluzioni. Se le ha, tradizionalmente si dice che il SL è compatibile.

~o~

Ieri abbiamo studiato il caso particolare in cui $b_1 = \dots = b_m = 0$. In tal caso (1) si dice SL omogeneo ("SLO").

Abbiamo visto che l'insieme delle soluzioni di un SLO in n incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. In particolare, ogni SLO ammette la soluzione banale $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Può darsi benissimo che ci sia solo quella.

Il punto di partenza ieri è stato un modo "vettoriale" di scrivere (1)

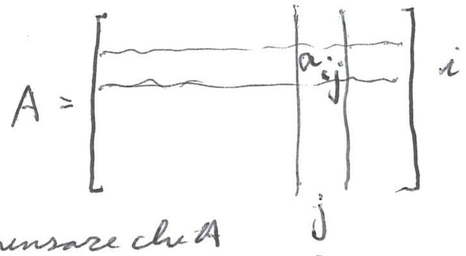
(2) $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$ $\qquad A_i = \begin{vmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$

A_i è l'i-esima colonna della matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ dei coefficienti di (1)

a_{ij} è detta <u>entrata</u> (o <u>elemento</u>) della matrice A

i è l'<u>indice di riga</u> di a_{ij}

j è l'<u>indice di colonna</u> di a_{ij}



A è matr. di <u>tipo</u> $m \times n$.

~ o ~

Possiamo pensare che A sia un modo diverso di scrivere un elemento di $\mathbb{R}^{m \cdot n}$, più naturale in questa situazione

Esaminiamo (2).

Sia $W \subset \mathbb{R}^m$ il sottospazio vettoriale generato da $A_1, \dots, A_n$. Cioè

$$W = \{\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Spostare in $\boxtimes$, p.3

$A_1, \dots, A_n$ è un sistema di generatori di W.

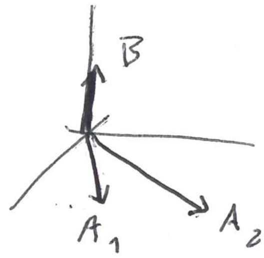
Suppongo (per semplicità di notazione) che $A_1, \dots, A_q$ ($q \leq n$) sia un sistema di generatori <u>minimale</u> per W.

Allora abbiamo visto che $A_1, \dots, A_q$ sono vettori LIN. INDIP. di $\mathbb{R}^m$.

È chiaro che (1) è compatibile, cioè ha soluzioni $\Longleftrightarrow$ $B \in W$ (<u>TEOREMA di ROUCHÈ-CAPELLI</u>) <u>SPIEGARE</u>

<u>ESEMPIO</u>

$m = 3$ $\quad A_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad A_2 \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$



Non c'è nessuna speranza di uscire dal piano $z = 0$, "smanettando" in tutti i modi con $x_1 = x$ e $x_2 = y$. In questo modo si riesce ad ottenere ogni vettore del piano $z = 0$, che è W. Ma B non appartiene a tale piano.

<u>Supponiamo</u>, quindi, che <u>$B \in W$</u>. Allora si pongono in modo naturale le seguenti domande:

a) la soluzione di (1) è unica?

b) se non lo è, "quante" ce ne sono?

c) l'insieme di tutte le soluzioni di (1) ha qualche "struttura"?

$\boxtimes$. È chiaro che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è soluzione di (1)

$\Longrightarrow$ tali λ_i verificano anche la

$$(3) \qquad x_1 A_1 + \dots + x_q A_q = \underbrace{B - x_{q+1} A_{q+1} - \dots - x_n A_n}$$

osservo che, qualsiasi siano i numeri reali $x_{q+1}, \dots, x_n$, questo è un vettore di W.

Una volta fissati arbitrariamente $x_{q+1}, \dots, x_n$ (si chiamano "parametri liberi"; "liberi" di essere variati a piacimento), allora esistono e sono unici $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}$ in modo che la (3) sia verificata. Cioè

fisso $(\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-q} \rightsquigarrow$ trovo un unico $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ che dipende da questi

in modo che $(\lambda_1, \dots, \lambda_q, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_n)$ sia soluzione di (1).

Quindi abbiamo la risposta alle prime due domande:

SPIEGARE

NO per a) e "∞^{n-q}" per b)

Per rispondere alla domanda c), partiamo da due soluzioni distinte $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ di (1). Che cosa le "lega"?

SPIEGARE

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = B$$
$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_n A_n = B$$

sono entrambe soddisfatte. Allora anche la loro differenza è soddisfatta:

$$\underbrace{\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n - (\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_n A_n)}_{\text{lo riscrivo così}} = B - B = O_{\mathbb{R}^m}$$

$$(\lambda_1 - \mu_1) A_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) A_n = O_{\mathbb{R}^m}$$

Cioè $(\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_n - \mu_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ è una soluzione del <u>SLO</u> associato ad (1): è quel SLO che si ottiene sostituendo $O_{\mathbb{R}}$ a ciascun b_i.

Viceversa, se $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ è una qualsiasi soluzione di (1) e $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ è una qualsiasi soluzione del SLO associato ad (1), allora verifichiamo che $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\omega_1, \ldots, \omega_n) = (\lambda_1 + \omega_1, \ldots, \lambda_n + \omega_n)$ è ancora soluzione di (1):

$$(\lambda_1 + \omega_1) A_1 + \ldots + (\lambda_n + \omega_n) A_n =$$
$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n = B + O_{\mathbb{R}^m} = B$$

La risposta alla domanda c) è, allora:

$$\text{soluzione } \underline{\text{generale}} \text{ del SL (1)} = \text{soluzione } \underline{\text{particolare}} \text{ di (1)} + \text{sol. generale del SLO associato ad (1)}$$

Per esempio, come soluzione particolare di (1) posso prendere quella per cui $\lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, $x_1, \ldots, x_q$ sono allora dati dall'unica soluz. di

$$x_1 A_1 + \ldots + x_q A_q = B$$

Trovo così $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q, 0, \ldots, 0)$.

Poi, formalizzando quanto visto ieri, un modo efficiente di scrivere tutte le sol. di

$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = 0_{\mathbb{R}^m}$ SLO associato ad (1)

è osservare che ↑ è equivalente a

(4) $x_1 A_1 + \ldots + x_q A_q = - x_{q+1} A_{q+1} - \ldots - x_n A_n$ $\boxed{\text{è l'analogo di (3)}}$

Prendo $x_{q+1} = 1$, $x_{q+2} = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$. Risolvo quindi

$$x_1 A_1 + \ldots + x_q A_q = - A_{q+1}$$

e trovo la soluzione

$s_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1q}, 1, 0, \ldots, 0)$ analogam. trovo

$$\left.\begin{array}{l} s_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2q}, 0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ s_{n-q} = (\alpha_{n-q,1}, \ldots, \alpha_{n-q,q}, 0, \ldots, 0, 1) \end{array}\right\} \text{altre soluz. del SLO associato al (1)}$$

È chiaro che $s_1, s_2, \ldots, s_{n-q}$ sono LIN INDIP

Ogni soluzione del SLO associato ad (1) è combinazione lineare di $s_1, \ldots, s_{n-q}$.

Così com'è stato enunciato il teorema di Rouché-Capelli è ovvio, ma inutile.
Vediamo di rimediare.

A : la matrice dei coeff. di (1) $A_1, \ldots, A_n$ le sue colonne

$A_1, \ldots, A_q$ sono LIN. INDIP.
Poiché $A_1, \ldots, A_q$ è un sistema di generatori di W posso pensare che q è anche il massimo numero di colonne di A che sono linearmente INDIP.
Questo numero si chiama RANGO della matrice A

$rg(A) = q$

A si chiama matrice incompleta di (1).
La m. completa di (1) è $[A|B]$ SPIEG.

$rg(A|B)$ è il ... SPIEGARE

$$\boxed{rg(A) \leq rg(A|B) \leq rg(A) + 1}$$

è un fatto NUMERICO

Infine, chiaramente $B \in W \iff rg(A) = rg(A|B)$

ESEMPIO
L'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$ è $ax+by+cz=d$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ vedremo.
Vogliamo studiare tutti i modi possibili in cui si possono intersecare tre piani π_1, π_2, π_3 in $\mathbb{R}^3$. Questo equivale a risolvere il SL

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

$(a',b',c') \neq 0$

$(a'',b'',c'') \neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{vmatrix}$$

$1 \leq rg(A) \leq 3$

SPIEG

$rg(A) \leq rg(A|B) \leq 3$

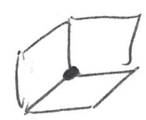
i casi possibili sono allora:

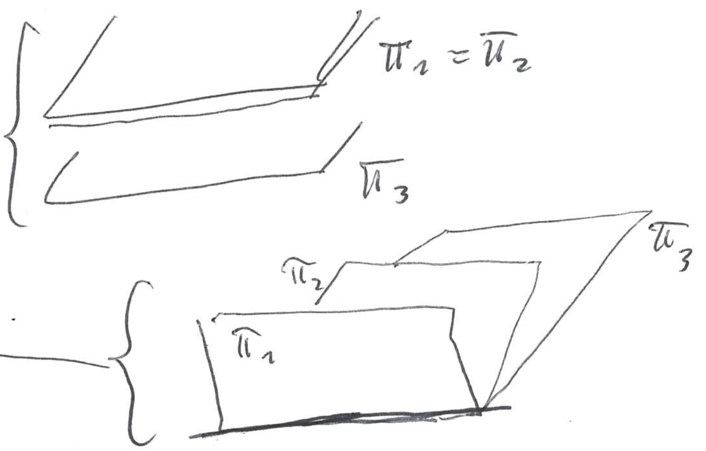
rg(A)	rg(A|B)
1	1
1	2
2	2
2	3
3	3

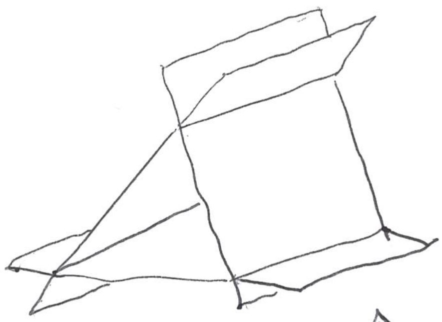
i tre piani coincidono

non c'è il caso "1 3"!

i tre piani si incontrano in un punto







"2 3"

MORALE: R-C serve in teoria !!!

ESERCIZIO

In $\mathbb{R}^3$ considero il sottospazio W generato da $u=\begin{vmatrix}2\\1\\2\end{vmatrix}$ e $v=\begin{vmatrix}3\\4\\5\end{vmatrix}$. W è l'insieme di tutte le soluzioni di un SLO?

(*) $ax+by+cz=0$ generica eq. di un ipotetico SLO

u è soluz. di $(\circledast) \Leftrightarrow a\cdot 2+b\cdot 1+c\cdot 2=0$

$$\begin{cases} 2a+b+2c=0 \\ 3a+4b+5c=0 \end{cases}$$

v è soluz. di $(\circledast) \Leftrightarrow a\cdot 3+b\cdot 4+c\cdot 5=0$

Ancora un SLO!
Risolvetelo per ESERCIZIO per trovare gli a, b, c giusti. Si trova un'unica equazione.
Verificate poi che le soluzioni di tale equazione sono tutte e sole

$$(2\lambda+3\mu,\ \lambda+4\mu,\ 2\lambda+5\mu) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$