INIZIARE con AVVISO a p. 4

LEZIONE 8

28/9/17

1

TEOREMA (DELLO SCAMBIO)

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

<u>Supponiamo</u> che V ammetta un sistema di generatori formato da un numero finito di vettori.

$I = \{v_1, \dots, v_r\}$ con $v_1, \dots, v_r \in V$ linearmente indipend.

$G = \{u_1, \dots, u_s\}$ sia un sistema di generatori di V.

Allora $\underline{r \leq s}$.

<u>Dim.</u>

$$v_1 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s \quad \text{perché } G \text{ è sist. di gen. per } V.$$

$v \neq 0_V$ perché è linearmente indipendente. SPIEGARE

$\Longrightarrow$ qualche λ_k è $\neq 0$. Sia $\lambda_1 \neq 0$. Allora

$$\lambda_1 u_1 = v_1 - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_s u_s \qquad \Downarrow \text{ ho } \lambda_1^{-1} \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1^{-1}(\lambda_1 u_1) = \lambda_1^{-1}(v_1 - \lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_s u_s)$$

$$\underbrace{(\lambda_1^{-1}\lambda_1)}_{=1} u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_s u_s$$

$$u_1 = \underbrace{\lambda_1^{-1}}_{\in\mathbb{R}} v_1 - \underbrace{(\lambda_1^{-1}\lambda_2)}_{\in\mathbb{R}} u_2 - \dots - \underbrace{(\lambda_1^{-1}\lambda_s)}_{\in\mathbb{R}} u_s$$

Allora $G' = \{v_1, u_2, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V. Infatti, prendo $w \in V$ arbitrario. Allora

$$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s =$$

$$= \alpha_1(\lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_s u_s) + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_s u_s$$

$$= (\alpha_1 \lambda_1^{-1}) v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1\lambda_1^{-1}\lambda_2) u_2 + \dots + (\alpha_s - \alpha_1\lambda_1^{-1}\lambda_s) u_s$$

Pertanto $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_s u_s$

$v_2 \neq 0$ perché è linearmente indipendente. (2
28/9/17

Dunque qualche β_j è $\neq 0$. Possiamo supporre che sia $\beta_j \neq 0$ con $j \geq 2$.

Infatti, se per assurdo $\beta_2 = \dots = \beta_s = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e si avrebbe

$$v_2 = \beta_1 v_1 \iff \beta_1 v_1 - v_2 = 0 \quad \text{con } \beta_1 \neq 0 \text{ (e anche } -1 \neq 0)$$

Allora v_1, v_2 sarebbero linearmente dipendenti.

SPIEG. Quindi, anche $v_1, v_2, \dots, v_r$ sarebbero lin. dipend., assurdo.

Supponiamo sia $\beta_2 \neq 0$. Allora

$$\beta_2 u_2 = -\beta_1 v_1 + v_2 - \beta_3 u_3 - \dots - \beta_s u_s \quad / \cdot \beta_2^{-1}$$

$$u_2 = -\beta_2^{-1}\beta_1 v_1 - \beta_2^{-1} v_2 - \beta_2^{-1}\beta_3 u_3 - \dots - \beta_2^{-1}\beta_s u_s$$

Quindi $\{v_1, v_2, u_3, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V.

"E così via", cioè

Supponiamo di aver dimostrato che per un certo numero naturale p, con $1 \leq p < r$ si abbia che $G'' = \{v_1, \dots, v_p, u_{p+1}, \dots, u_s\}$ è un sistema di generatori di V. Allora

$$v_{p+1} = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_p v_p + \gamma_{p+1} u_{p+1} + \dots + \gamma_s u_s \qquad \gamma_i \in \mathbb{R}$$

$v_{p+1} \neq 0$ perché è linearmente indipendente.

Allora qualche γ_i è $\neq 0$.

Se fosse $\gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_s = 0$ allora si avrebbe

$$v_{p+1} = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_p v_p \iff \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_p v_p + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_{p+1} = 0$$

e quindi $v_1, \ldots, v_r$ non sarebbero linearmente indipendenti. Assurdo.

Per fissare le idee, sia $\underline{\gamma_{p+1} \neq 0}$. Allora da

$$\gamma_{p+1} u_{p+1} = -\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_p v_p + v_{p+1} - \gamma_{p+2} u_{p+2} - \ldots - \gamma_s u_s$$

segue

$$u_{p+1} = -\gamma_{p+1}^{-1} \gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_p v_p + \gamma_{p+1}^{-1} v_{p+1} - \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_{p+2} u_{p+2} - \ldots - \gamma_{p+1}^{-1} \gamma_s u_s$$

Quindi

$\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_s\}$ è un sistema di generatori per V.

Ad ogni passo "scambio" un "u" con un "v".
L'unica cosa che può fermare questo procedimento è aver finito tutti i "v." Quindi $r \leq s$. ∎

OSSERVAZIONE

Quello che si dimostra effettivamente è che

- $\{v_1, \ldots, v_p, u_{p+1}, \ldots, u_s\}$ è un sistema di generatori di V per ogni $p = 1, \ldots, r$ "P_p" PROPRIETÀ che dipende dall'intero $p \geq 1$

Abbiamo prima provato il caso $p = 1$. (Poi il caso $p = 2$ per capire un pò meglio). Infine abbiamo visto come P_p vera $\Rightarrow$ P_{p+1} vera. Una dim. per INDUZIONE

28/9/17

V spazio vettoriale $G=\{u_1, \dots, u_s\}$ sist. di generatori di V

Il Teorema dello scambio ci dice che in V riuscirò a trovare <u>al più</u> s vettori linearmente indipendenti tra loro. Cioè

$v_1 \in V$ $\quad v_1 \neq 0$ $\quad$ (allora v_1 è LIN. INDIP.)

$v_1, v_2 \in V$ $\quad$ LIN. INDIP.

$v_1, v_2, v_3 \in V$ $\quad$ — " —

— —

Dopo un numero finito di passi (al più s) questo procedimento non si può ripetere. Abbiamo trovato un insieme di vettori di V, LIN. INDIP. tra loro, <u>massimale</u>. Cioè che non è $\subsetneq$ in un insieme di vettori LIN. INDIP.

<u>PROPOSIZIONE</u> Ogni insieme I di vettori LIN. INDIP. massimale di uno sp. vett. V è un sistema di generatori di V.

<u>Dim.</u>

$I = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad v_1, \dots, v_n$ LIN. INDIP.

Sia $w \in V$ qualsiasi. Allora, per ipotesi, $v_1, \dots, v_n, w$ <u>non</u> sono LIN. INDIP. Cioè esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = 0_V$$

Se fosse $\beta = 0$, allora $v_1, \dots, v_n$ non sarebbero LIN. INDIP. perché qualche α_i è $\neq 0$. Assurdo. Allora $\beta \neq 0$

$$\beta w = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_n v_n \;/\beta^{-1} \Rightarrow w = \underbrace{\left(-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_1 - \dots \underbrace{\left(-\frac{\alpha_n}{\beta}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_n$$

Dunque: ogni el.to di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. ∎

Avevamo anche visto

<u>PROPOSIZIONE</u> Sia $u_1, \dots, u_m \in V$ sp. vett un sistema di generatori <u>minimale</u> di V ("minimale" significa che se si elimina da $\{u_1, \dots, u_m\}$ anche un solo elemento, allora quel che resta <u>non</u> è un sist. di gen. di V. Allora $u_1, \dots, u_m$ sono LIN. INDIP.

<u>Def</u>. Un sistema di generatori per V formato da vettori linearmente indipendenti tra loro si chiama <u>base</u> di V.

- Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora ogni $w \in V$ <u>è</u> comb. lineare di $v_1, \dots, v_n$ in modo <u>unico</u>.
- Ogni spazio vettoriale ammette (almeno) una base. Infatti abbiamo supposto che ogni spazio vettoriale che consideriamo ammette un sistema di generatori finito. Preso un tale s.d.g., lo "sfoltiamo".

~~28/9/17~~

Ricordiamo che supponiamo ~~...~~ sempre che gli spazi vettoriali V (su $\mathbb{R}$) che ci interessano abbiano ~~lo stesso numero~~ un sistema di generatori finito

SPIEGARE.

$\boxed{\text{INSERIRE QUI FOGLIO } 3,5}$

COROLLARIO

Due qualsiasi basi B_1, B_2 di V hanno lo stesso numero di elementi.

Dim.

$$\left.\begin{array}{lll} B_1 = \text{"}I\text{"} & B_2 = \text{"}G\text{"} \Longrightarrow & \# B_1 \leq \# B_2 \\ B_2 = \text{"}I\text{"} & B_1 = \text{"}G\text{"} \longrightarrow & \# B_2 \leq \# B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \# B_1 = \# B_2$$

■

Questo numero naturale associato a V (cioè $\# B$, dove B è una qualsiasi base di V) è importantissimo! si chiama la dimensione di V: $\dim(V)$

ESEMPI

1) $V = \{0\}$ $\quad B = \emptyset \Longleftrightarrow \dim(V) = 0$

2) $\mathbb{R}^n$ $\quad e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ è base di $\mathbb{R}^n$

Dunque $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

3) $S \subset M(2\times 2)$ $\quad A \subset M(2\times 2)$ $\quad \dim(M(2\times 2)) = 4$

$\dim(S) = 3$ $\quad \dim(A) = 1$

~~COROLLARIO (TEOREMA del COMPLETAMENTO ad una BASE)~~

~~Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ lin. indipendenti e sia $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una qualsiasi base di V (dunque $\dim(V) = n$). Allora esistono $n-k$ elementi di B, siano $u_{k+1}, \dots, u_n$~~

Un corollario del teorema dello scambio è il
TEOREMA DI COMPLETAMENTO AD UNA BASE
V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. $v_1, \dots, v_r \in V$ linearmente indipendenti. $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ base di V. Allora esistono $n-r$ vettori di $\mathcal{B}$, per comodità di notazione siano $u_{r+1}, \dots, u_n$, tali che $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ è una base di V

Dim.
Applico il teorema dello scambio ad $I = \{v_1, \dots, v_r\}$ e $G = \mathcal{B}$. Trovo così il sistema di generatori $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$. Questo ha il numero minimo di elementi per un sistema di gen. di V, pertanto è sist. di gen. minimale. Infine, da questo segue che $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ sono anche linearmente indipendenti, dunque formano una base di V. ■

Spesso non serve specificare $\mathcal{B}$. Basta sapere che si può "completare" $I = \{v_1, \dots, v_r\}$ ad una base di V.
Il teorema è utilissimo.
Spesso $\{v_1, \dots, v_r\}$ è una base di un sottospazio W di V.
COROLLARIO $W \subset V$ sottospazio $\Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$.
Se $W \subset V$ è sottospazio e se $\dim(W) = \dim(V)$, allora $W = V$.