Laurea Magistrale in Matematica

Università degli Studi di Trieste
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Corso di Istituzioni di Geometria Superiore 2 - A

Appello d'esame del 28 Settembre 2017

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1.

(a) *(4 punti)* Sia M una varietà differenziabile tale per cui esiste un atlante formato da due carte (U, φ) e (V, ψ). Si dimostri che se $U \cap V$ è connesso, allora M è orientabile.

(b) *(5 punti)* Si dimostri la seguente generalizzazione del punto precedente: se M è unione di due aperti U e V orientabili con intersezione connessa, allora M stessa è orientabile.

(c) *(3 punti)* Si dia un esempio di una varietà differenziabile non orientabile ricoperta da due aperti, U, V, con intersezione connessa e tale che U sia orientabile, mentre V no.

2. Si consideri l'insieme $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ con la struttura differenziabile standard (cioè indotta dall'identificazione naturale $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$).

(a) *(6 punti)* Si dimostri che il sottoinsieme $O(2)$ delle matrici $A \in M_2(\mathbb{R})$ tali per cui $AA^T = I_2$ è una sottovarietà di dimensione 1.

(b) *(3 punti)* Si dimostri che $O(2)$ ha almeno due componenti connesse.

(c) *(3 punti)* Si dimostri che $O(2)$ ha esattamente due componente connesse.

3. Sia $T^2 = S^1 \times S^1$ il toro bidimensionale e sia $p \in T^2$.

(a) *(6 punti)* Si assuma l'uguaglianza $H^2(T^2 \backslash \{p\}) = \{0\}$ e si calcolino i gruppi di coomologia di De Rham di $T^2 \backslash \{p\}$.

(b) *(3 punti)* Si dimostri che in effetti $H^2(T^2 \backslash \{p\}) = \{0\}$. (Suggerimento: si usi la dualità di Poincaré.)