SCRITTO 28/09/17	IGS2A

1. (a) Se (U, φ) e (V, ψ) sono concordemente orientate $\left(\det(J(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0 \text{ ovunque}\right)$

$\Rightarrow \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ è un atlante orientato per M $\Rightarrow$ M è orientabile.

Altrimenti, se (U, φ) e (V, ψ) non sono concordemente orientate, allora (U, φ) ed $(V, A \circ \psi)$ sono concordemente orientate, dove $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $n = \dim M$, $\det(A) < 0$. Infatti

$$\det J\left(\varphi \circ (A \circ \psi)^{-1}\right) = \det J\left(\varphi \circ \psi^{-1} \circ A^{-1}\right) =$$

$$= \det\left(J(\varphi \circ \psi^{-1}) \cdot A^{-1}\right) = \det\left(J(\varphi \circ \psi^{-1})\right) \cdot \det A > 0.$$

(b) Se U e V sono varietà orientabili $\Rightarrow \exists$ forme di volume $Vol_U \in \Omega^n(U)$, $Vol_V \in \Omega^n(V)$.

Su $U \cap V$, $\exists\, f: U \cap V \to \mathbb{R}$ differenziabile t.c.

$$Vol_U(p) = f(p)\, Vol_V(p) \qquad \forall\, p \in U \cap V.$$

$$\Rightarrow \quad f(p) \neq 0 \quad \forall\, p \in U \cap V$$

($U \cap V$ connesso) $\Rightarrow$ $f > 0$ ovunque o

$f < 0$ ovunque.

Sia $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U, V\}$ di M.

Se $f > 0$: $\rho_U \cdot Vol_U + \rho_V \cdot Vol_V$

è una forma di volume su M.

Se $f < 0$: $\rho_U \cdot Vol_U - \rho_V \cdot Vol_V$

è una forma di volume su M.

$\Rightarrow$ M è orientabile in entrambi i casi.

(c) $M = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $\underbrace{U = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{[0:0:1]\}}_{\text{Nastro di Möbius}}$, $V = \{[x:y:z] : z \neq 0\}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ $\boxtimes$

2. (a) Consideriamo la funzione

$$F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym^2(\mathbb{R}) \quad \left(= \begin{array}{c} \text{matrici } 2\times 2 \\ \text{simmetriche} \end{array}\right)$$

$$F(A) = A \cdot A^T$$

$$\Rightarrow F \in C^{\infty}$$

$$\begin{array}{ccccc} D_A F : & M_2(\mathbb{R}) & \to & Sym^2(\mathbb{R}) \\ & \| & & \| \\ & T_A M_2(\mathbb{R}) & & T_{F(A)} Sym^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

perché $M_2(\mathbb{R})$ e $Sym^2(\mathbb{R})$ sono spazi vettoriali

$$D_A F(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(A + t\cdot B) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A + tB)\cdot(A + tB)^T =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left\{ A\cdot A^T + t\cdot A\cdot B^T + t\cdot B\cdot A^T + t^2\cdot B\cdot B^T \right\}$$

$$= A\cdot B^T + B\cdot A^T$$

Sia $A \in O(2)$. Osserviamo che, $\forall C \in Sym^2(\mathbb{R})$, se poniamo $B := \frac{1}{2} C\cdot A \Rightarrow A B^T + B\cdot A^T = C$

$\Rightarrow D_A F$ suriettivo $\Rightarrow O(2)$ sottovarietà di dim $= \underbrace{1}_{\dim M_2(\mathbb{R}) - \dim Sym^2(\mathbb{R})}$ di $M_2(\mathbb{R})$

(b) $O(2) \leqslant GL_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall A \in O(2),\ \det(A) \neq 0.$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(2) \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$

$\det I_2 > 0$

$\Rightarrow$ siccome $\det : O(2) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è continua, $O(2)$ non può essere connesso.

(c) Sia $SO(2) = \{ A \in O(2) : \det(A) = 1 \}$.

$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow SO(2)$ è connesso.

$\{ A \in O(2) : \det A = -1 \} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \middle| \vartheta \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ anche $\{ A \in O(2) : \det(A) = -1 \}$ è connesso. $\Rightarrow O(2)$ ha esattamente due componenti connesse.

3. (a) In T^2, sia $U := T^2 \setminus \{p\}$

e sia $V \subset T^2$ disco centrato in p.

$\Rightarrow U \cup V = T^2, \quad U \cap V = V \setminus \{p\} \underset{h}{\simeq} S^1.$

Applicando Mayer-Vietoris:

$$0 \to \underbrace{H^0_{dR}(T^2)}_{\mathbb{R}} \to \underbrace{H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V)}_{\mathbb{R}^2} \to \underbrace{H^0_{dR}(U \cap V)}_{\mathbb{R}} \to$$

$$\to \underbrace{H^1_{dR}(T^2)}_{\cong \mathbb{R}^2} \to \underbrace{H^1_{dR}(U)}_{\cong \mathbb{R}^x} \oplus \underbrace{H^1_{dR}(V)}_{=0} \to \underbrace{H^1_{dR}(U \cap V)}_{\cong \mathbb{R}} \to$$

$$\to \underbrace{H^2_{dR}(T^2)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H^2_{dR}(U)}_{=0} \oplus \underbrace{H^2_{dR}(V)}_{=0} \to \underbrace{H^2_{dR}(U \cap V)}_{= 0}$$

$\Rightarrow 2 - x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

(b) $H^2(T^2 \setminus \{p\}) \cong H^0_c(T^2 \setminus \{p\})^* \cong \{0\}.$