

LABORATORIO 1

A.A. 2014-2015

ANDREA BRESSAN

Informazioni sul corso 1

primo corso di laboratorio

- metodologia
- strumenti e tecniche di misura
- applicazioni a meccanica e termodinamica
- misure di lunghezze, masse, densità, intervalli di tempo
- caratteristiche del moto del pendolo semplice e misura dell'accelerazione di gravità
- studio delle caratteristiche elastiche dei materiali
- ...

Informazioni sul corso 2

il corso consiste in

una parte di teoria

- considerazioni di base sulla misura di grandezze fisiche e analisi dei dati sperimentali
- approfondimenti sugli argomenti di fisica relativi alle esperienze

si da' per scontato quanto trattato nei corsi di Fisica generale

una parte sperimentale

- strumentazione e metodi
- esperienze di laboratorio (~8 esperienze di un pomeriggio)

Informazioni sul corso 3

Il corso è centrato sulle esperienze di laboratorio, alla cui descrizione ed esecuzione con relativa analisi dei dati è dedicata la maggior parte del tempo

Le esperienze non sono “dimostrazioni” ma devono essere svolte da voi, il più autonomamente possibile

Per favorire la partecipazione attiva alle esperienze

- ci saranno 3/4 turni, con 20-25 persone per turno
- in generale il lavoro viene fatto in gruppi di 4 studenti

La frequenza in laboratorio è obbligatoria e viene verificata (*)

Seguire le lezioni è essenziale per il corretto svolgimento delle esperienze

- a parte il primo laboratorio, cosa fare viene spiegato in aula, e la descrizione dell’esperienza non verrà ripetuta all’inizio di ciascun turno ne’ durante i turni

(*) in caso di problemi specifici, cercheremo assieme caso per caso le possibili soluzioni

Orario del corso

turni: un pomeriggio alla settimana / persona

in aula; in genere tempo dedicato a:

- A. preparazione per l'esperienza di laboratorio della settimana
- B. discussione (con vostre presentazioni) sulle difficoltà incontrate e sui risultati ottenuti nell'esperienza precedente

	lezione	Laboratorio
lunedì	11.00-13.00	14.00-16.00
martedì	11.00-13.00	14.00-18.00
mercoledì		14.00-18.00
giovedì		14.00-18.00
venerdì		14.00-18.00

Attività di laboratorio

80 persone → 3/4 turni (in parallelo con il corso di Calcolo)

- martedì pomeriggio,
- o mercoledì pomeriggio,
- o giovedì pomeriggio
- o venerdì pomeriggio

- A. definite i turni in modo da avere lo stesso numero di persone ciascun pomeriggio
- B. scegliete un pomeriggio, ricordando che per tutto il corso il vostro turno sarà sempre lo stesso (per evitare sovraffollamento in laboratorio e interferenze con altri corsi)
- C. all'interno di ogni turno, vi dividerete in gruppi di 4 persone (non necessariamente sempre le stesse per ogni esperienza)
- D. elenco con i nomi per ciascun turno: lunedì prossimo

Orario del corso

Un pomeriggio di laboratorio alla settimana:

Il tempo è sufficiente per eseguire una esperienza ed elaborarne i dati

- alla fine di ogni esperienza, da ogni gruppo tabelle riassuntive con i dati ed i risultati ottenuti
- per 4 esperienze, anche relazione individuale completa, da consegnare entro una settimana (eventuali correzioni prima dell'esame)

Esame

A circa metà corso è prevista una provetta su argomenti di base

- es: incertezze in misure dirette e indirette, cifre significative,
- calcolo della deviazione standard e di probabilità a partire da funzioni di distribuzione, stima di parametri con metodi grafici,
- compatibilità delle misure, ...

utile per tutti

- se valutazione insufficiente, maggiori approfondimenti all'esame

L'esame (solo orale) consiste in domande sulla parte "teorica" e sulle esperienze svolte, e nella discussione delle relazioni

Per il voto si terrà conto anche del lavoro fatto durante il corso e della qualità delle relazioni

Testi

Testi di consultazione consigliati

(solo per le parti effettivamente svolte durante il corso)

- M. Dapor, M. Ropele, Elaborazione dei dati sperimentali, Springer
- A. Filipponi, Introduzione alla Fisica, Zanichelli
- M. Severi, Introduzione alla sperimentazione fisica, Zanichelli
- Materiale didattico distribuito durante il corso
- I vostri appunti

Testi di Fisica 1 per le parti di teoria relativa alle esperienze

Inciso

Attività di ricerca – Dipartimento di Fisica

astrofisica

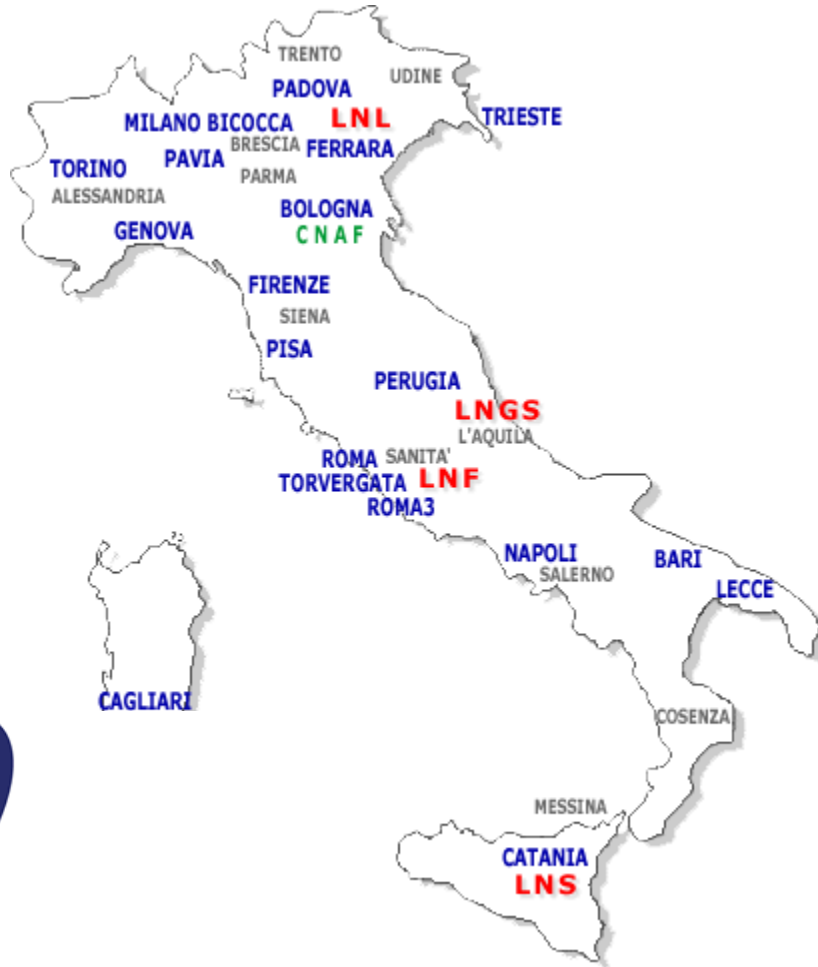
fisica teorica

fisica sperimentale

- fisica nucleare e subnucleare
- stato solido
-

in collaborazione con INFN

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)



“è l’istituto che promuove, coordina ed effettua la ricerca scientifica nel campo della fisica subnucleare, nucleare e astro particellare, nonché lo sviluppo tecnologico necessario alle attività in tali settori. Opera in stretta connessione con l’Università e nell’ambito della collaborazione e del confronto internazionale.”

COMPASS

FISICA PARTICELLARE

FISICA ASTROPARTICELLARE

FISICA NUCLEARE

FISICA TEORICA

RICERCA TECNOLOGICA

What does “COMPASS” stand for?

COMPASS: NA58, EHN2, building 888:



Common

Muon

Proton

Apparatus for

Structure and

Spectroscopy

COMPASS is the *largest surface experiment* at CERN

COMPASS Collaboration



Дубна (LPP and LNP),
Москва (INR, LPI, State
University),
Протвино



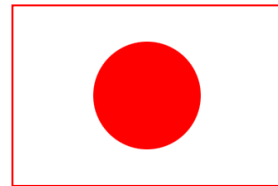
CERN



Bochum, Bonn (ISKP
& PI), Erlangen,
Freiburg, Mainz,
München TU



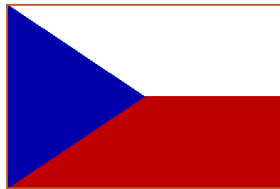
Warsawa (NCBJ),
Warsawa (TU)
Warsawa (U)



Yamagata



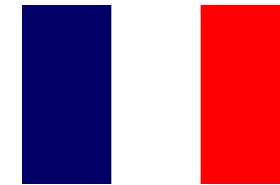
USA (UIUC)



Praha



Lisboa



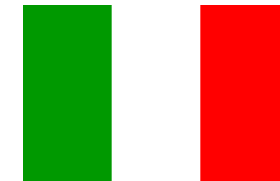
Saclay



Burden, Calcutta



Tel Aviv



Torino
(University, INFN),
Trieste
(University, INFN)



Taipei (AS)

- about 220 members
- from more than 13 different countries
- involving 24 universities and research institutes

The People



Gruppo di Trieste: ricercatori, assegnisti, dottorandi

- **Dipartimento di Fisica:** F. Bradamante, A. Bressan, S. Dasgupta, V. Duic, N. Makke, A. Martin, G. Sbrizzai, P. Schiavon, B. Parsamyan
- **Sezione INFN:** R. Birsa, S. Dalla Torre, S. Levorato, F. Sozzi, S. Tessaro, F. Tessarotto, ...
- **ICTP:** A. Cicuttin, M.L. Crespo

>18 persone

COMPASS – some facts

Located at CERN North Area beam line (Possible beams: μ^+ , μ^- , p^+ , p^- , K → Several physics programs)

- 1996: COMPASS proposal
- 1999-2000: construction and installation
- 2001: commissioning run

■ Experiments with **muon beam**

- Spin structure: Gluon polarization
- u,d,s flavor decomposition of the nucleon spin
- Transverse spin
- Quark transverse momentum distribution

■ Experiments with **hadron beams**

- Pion polarizability
- Search for exotic states:
 - Light meson spectroscopy
 - Baryon spectroscopy

- '3D' structure of the nucleon (DVCS)
- Unpolarised quark transverse momentum distribution and strangeness

- Pion and Kaon polarizabilities
- Polarized Drell-Yan: universality of transverse momentum distribution

COMPASS – some facts

- Experiments with **muon beam**

- Experiments with **hadron beams**

- Nucleon Spin structure
- p, d polarized target (L & T)

- Hadron spectroscopy
- Small LH₂ or nuclear targets

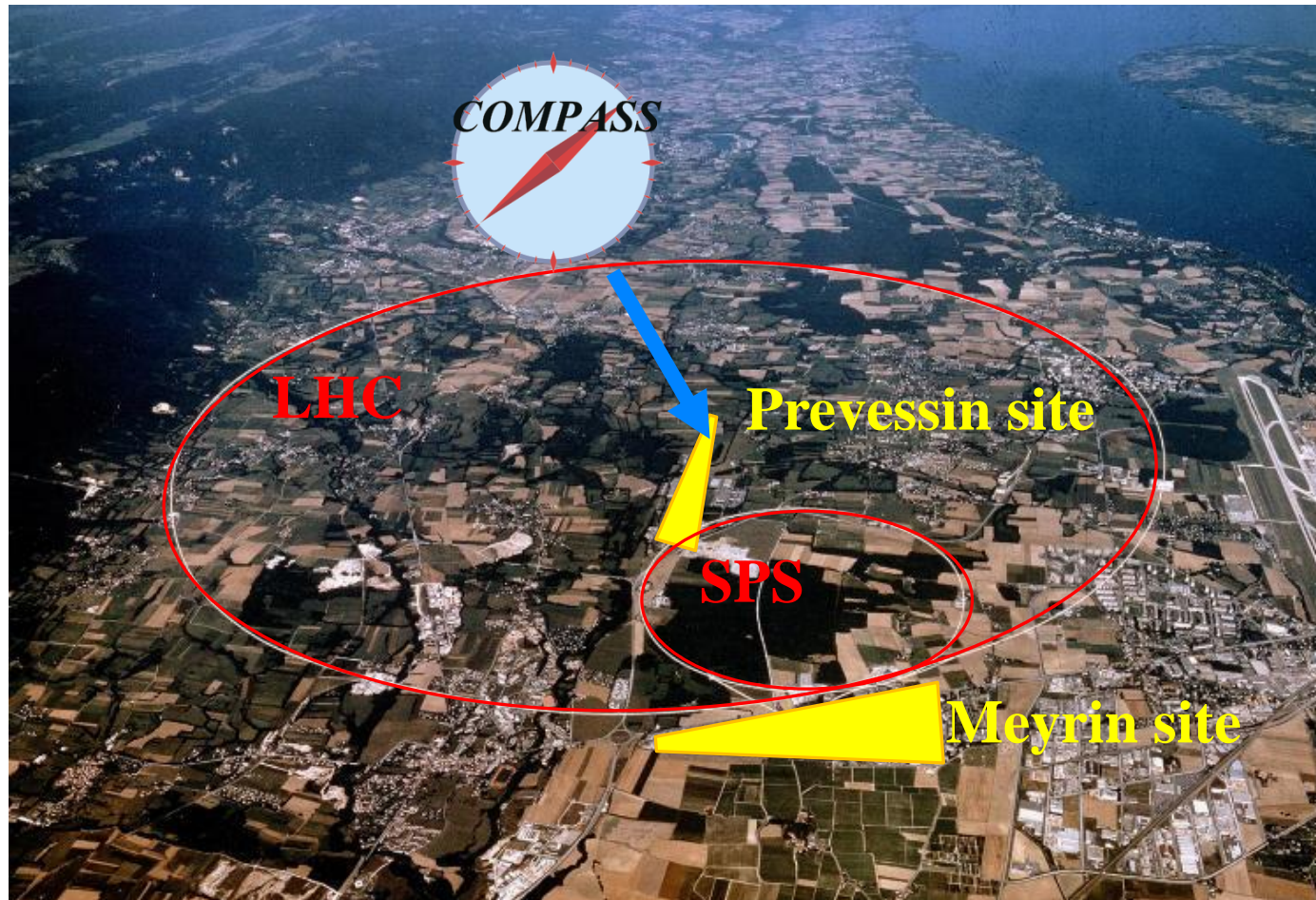
- DVCS/Unpolarised
- Long LH₂ target

- Polarized Drell-Yan studies
- Polarized target (T)

Reconfigurable target region - versatile experimental setup!

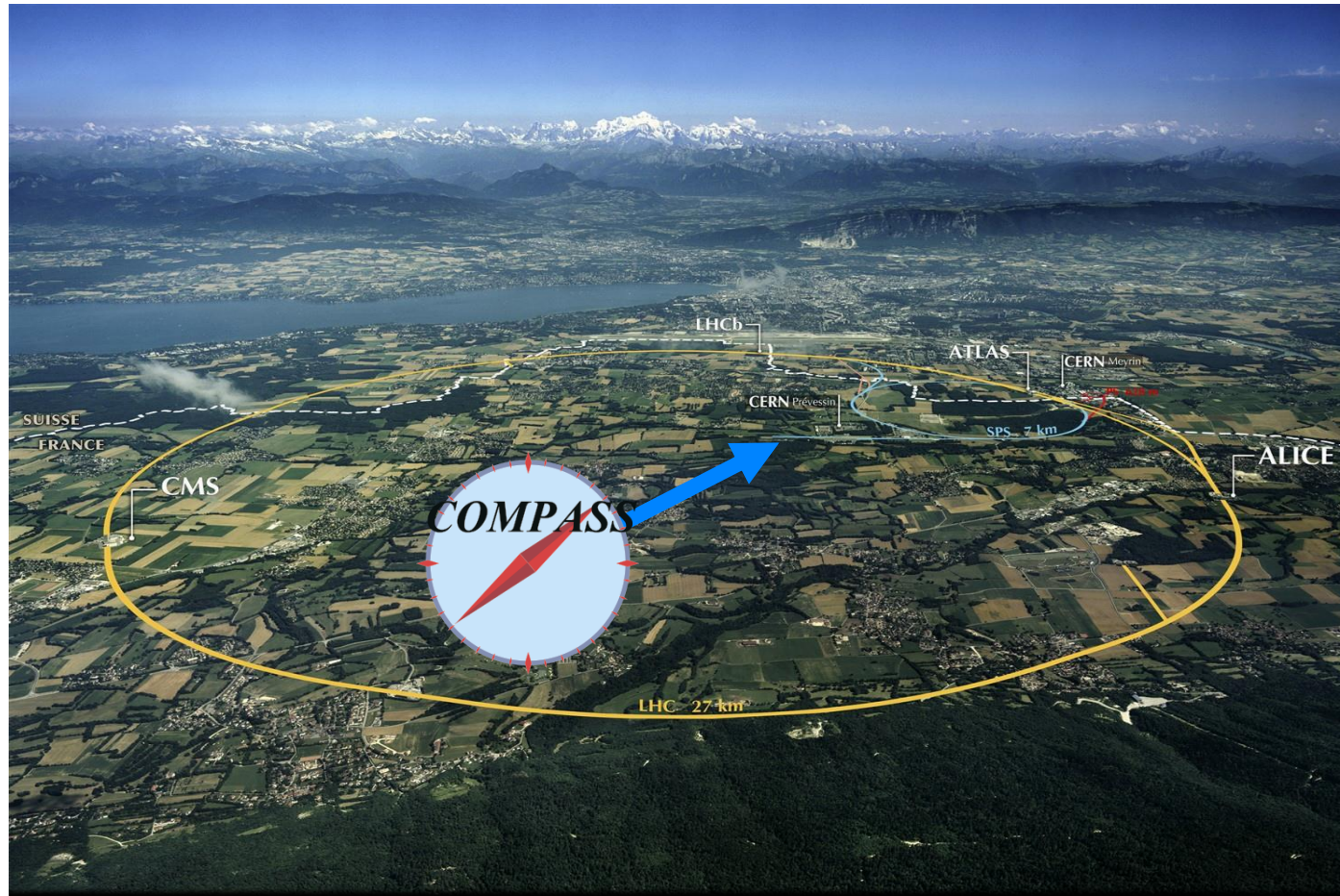
Where is COMPASS located? View from SW

SPS experiment in the North Area at the CERN Preveessin site



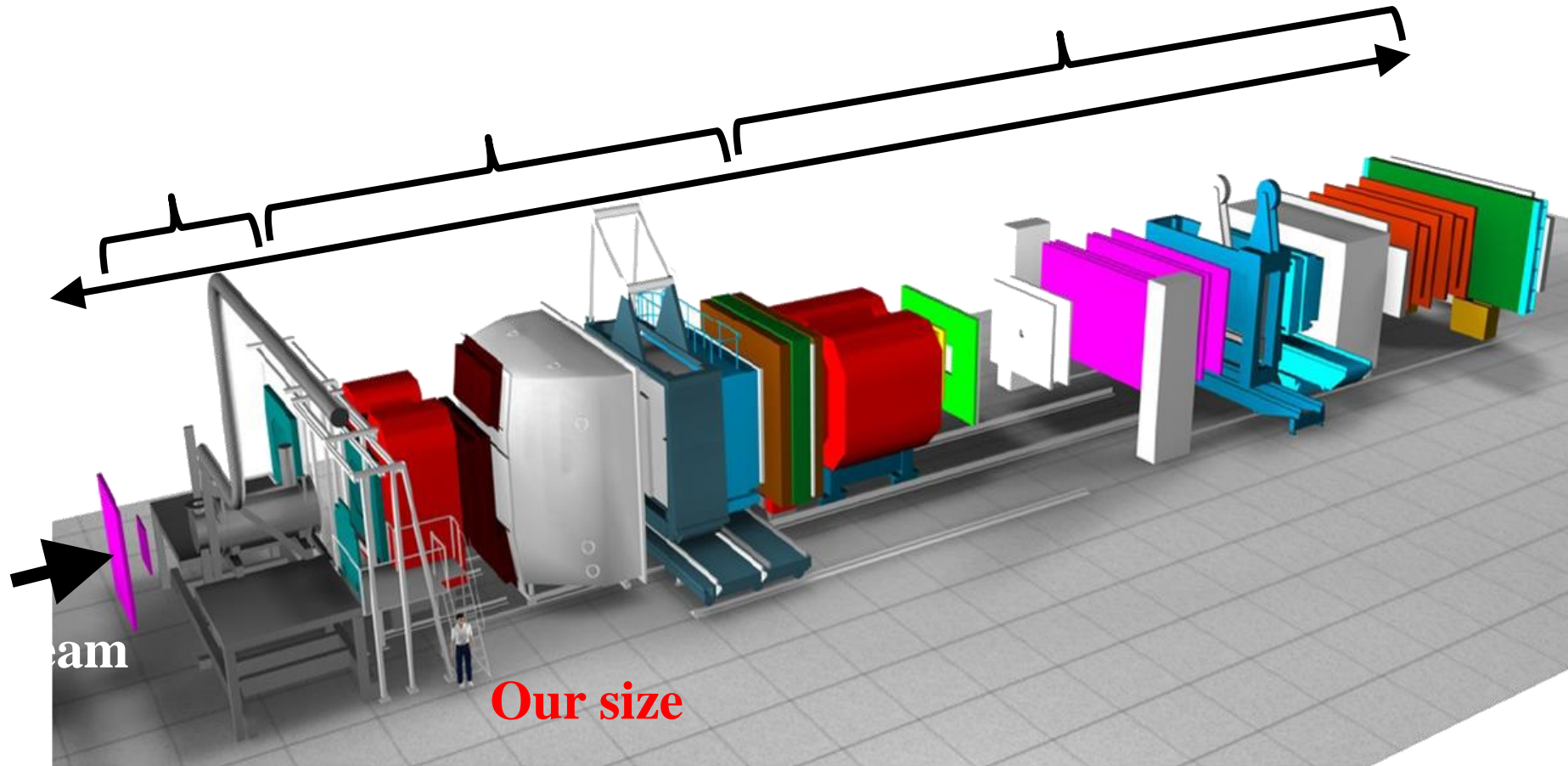
Where is COMPASS located? View from NW

SPS experiment in the North Area at the CERN Preveessin site



What does COMPASS look like?

Flexible fixed-target experiment, two-stage forward large-angle spectrometer



COMPASS Spectrometer



Back to work

Finalità

Un corso di laboratorio deve insegnare agli studenti le metodologie necessarie per effettuare degli esperimenti in grado di verificare delle leggi fisiche ricavate in base a considerazioni teoriche di carattere generale, oppure trovare delle leggi empiriche che governano un dato fenomeno e trovare il valore sperimentale dei parametri che caratterizzano tale leggi.

Nel fare ciò lo studente (...qualsiasi sperimentatore) si imbatte in due difficoltà:

- errori di misura degli strumenti e/o gli errori stocastici inerenti al processo di misura
- presenza di effetti secondari che alterano il processo di misura e dei quali occorre minimizzare l'impatto e/o sottrarre il contributo nella fase di analisi dei dati.

Ad esempio in termodinamica viene spesso usato il dispositivo costituito da un cilindro contenente del gas e chiuso da un pistone che può scorrere senza attrito, ma che naturalmente non fa uscire il gas dal cilindro. Questa condizione è tutt'altro che semplice dall'essere realizzata sperimentalmente.

Lo sperimentatore deve tenere conto di tutti gli errori, siano essi di misura, statistici e sistematici, e ridurre gli effetti secondari con un apparato sperimentale opportuno.

Suggerimenti generali

Nella realizzazione di un esperimento è bene seguire alcune regole generali, sebbene ogni esperimento costituisca un caso a sé stante:

- Conoscere la trattazione teorica del fenomeno che si vuole misurare e dei fenomeni secondari presenti
- Ideare un procedimento di misura ed un apparato sperimentale che vi permetta di verificare il fenomeno in studio, riducendo nello stesso tempo gli altri effetti secondari.
- Valutare la precisione che si vuole/può raggiungere in base agli strumenti di misura a disposizione.
- Fatto ciò inizia la fase di presa dati. Qui interviene la “manualità” dello sperimentatore, fatta di pignoleria, accuratezza, meticolosità e comprensione. Tutti i dati presi vanno registrati, insieme con le condizioni sperimentali generali, nel vostro “diario di bordo” (logbook).
- Durante la presa dati occorre fare un’analisi degli stessi, grossolana ma veloce, in tempo reale (online) che permetta di scoprire eventuali errori nella presa dati, oppure la necessità di prendere dati in condizioni diverse, ed effettuare quindi le nuove misure necessarie.
- terminate le misure, si procede all’analisi dati finale (offline), dove andranno applicate le opportune tecniche di analisi statistica dei dati. In questa fase occorre anche valutare la presenza di errori sistematici, correggerli se possibile, oppure valutarne l’entità ed includere questa incertezza nell’errore finale.

... continua

- Occorre infine trarre delle conclusioni dall'esperimento effettuato. La prima conclusione ovvia è il valore trovato, con il suo errore, della grandezza che si voleva misurare. Si può quindi discutere se il nostro esperimento verifichi o meno l'ipotesi teorica di partenza e con quale significatività statistica. Si possono eventualmente suggerire dei cambiamenti all'apparato sperimentale che permettano di migliorare la bontà della misura (Oppure si può concludere di aver fatto una nuova scoperta!).
- Ultima parte dell'esperimento (da non trascurare) è la scrittura del "lavoro". Questa consiste nella pubblicazione su una rivista scientifica da parte del ricercatore e nella scrittura della relazione da parte degli studenti. Quest'ultimo passo è in genere non amato, sia dagli studenti che dai ricercatori affermati, tuttavia senza quest'ultimo sforzo tutto il resto sarà stato inutile!

La progettazione, realizzazione ed esecuzione di un esperimento è difficile da insegnare in quanto non ci sono regole ferree valide per tutte le situazioni, deve essere stimolata una visione critica dell'attività che si sta svolgendo. Occorre inoltre esercitare senso pratico, elasticità mentale, inventiva e fantasia. Gli studenti in genere reagiscono "male" a queste sollecitazioni e preferiscono la strada sicura della regola matematica; tuttavia la valenza positiva (che fa sì che in generale un fisico si adatti facilmente a qualsiasi contesto lavorativo e/o di ricerca) risiede proprio nell'abitudine a lavorare senza "regole" preconcelte.

Informazioni utili

Occorre innanzitutto fare una distinzione tra il quaderno di laboratorio (logbook) e la relazione di laboratorio. Il logbook va riempito durante lo svolgimento dell'esperimento. Nel logbook vanno riportati:

- Una descrizione dell'apparato sperimentale
- Gli strumenti utilizzati con le loro caratteristiche
- Una descrizione del procedimento di misura
- Una o più tabelle con i dati dell'esperimento
- Uno o più grafici che permettano un controllo immediato se i dati seguono l'andamento previsto o meno. Non è necessario a questo livello un'analisi statistica accurata.
- Una prima stima, anche con una valutazione grossolana degli errori, della grandezza che si vuole misurare.

È importante imparare a registrare accuratamente tutti i dati sperimentali, così come sono stati misurati, in modo che chiunque altro possa comprenderli ed utilizzarli (ad esempio se vuole ripetere il vostro esperimento).

I dati vanno registrati tenendo conto del corrispondente errore di misura. Come regola, non ferrea, si possono utilizzare due cifre significative per l'errore.

Il logbook costituisce la base di partenza per la stesura della relazione di laboratorio, quindi tanto più esso sarà ordinato e completo, tanto più sarà facilitata l'analisi dei dati offline e la scrittura della relazione.

Relazioni

- 1. Introduzione teorica:** descrivete brevemente cosa volete misurare e perché, oppure quale relazione teorica volete verificare. Non dovete scrivere nessuna dimostrazione, ma limitatevi a riportare la formula finale, illustrando eventualmente i parametri che la caratterizzano e/o i limiti di validità di applicazione.
- 2. Procedimento di misura:** illustrate il procedimento di misura che si vuole adottare. In genere questo aiuta a capire la descrizione successiva della presa dati.
- 3. Descrizione dell'apparato sperimentale:** descrivete brevemente l'apparato sperimentale utilizzato, le caratteristiche degli strumenti e qualunque altra informazione utile per riprodurre l'esperimento da voi effettuato.
- 4. Descrizione della presa dati:** descrivete la procedura da voi seguita per la presa dati, discutete gli errori che attribuite alle varie grandezze, riportate una o più tabelle di dati delle vostre misure.

... continua (relazioni)

- 5. Analisi dei dati:** descrivete il tipo di analisi dati che avete effettuato. Nella maggior parte dei casi avrete a che fare con delle relazioni lineari delle quali dovrete trovare il coefficiente angolare. Ha importanza che voi sappiate cosa state facendo. Riportate uno o più grafici che descrivono i vostri dati includendo nel grafico anche la retta risultante. Illustrate le successive elaborazioni che conducono al risultato finale.
- 6. Conclusioni e Commenti:** riportate chiaramente il risultato finale da voi trovato. Aggiungete poi ogni tipo di commento volto alla comprensione del risultato, oppure a come migliorare la misura. Potete fare ad esempio un'analisi dei vari errori che concorrono all'errore finale per determinare la causa dominante, e così via. È molto importante che il risultato finale sia chiaramente indicato; alle volte, in relazioni anche lunghe e articolate è risultato difficile trovare quale fosse stato il risultato della misura

Metodo Scientifico

Scienza: insieme di conoscenze su un determinato argomento basato su valutazioni anche quantitative.

Fenomeno: qualsiasi oggetto fatto od avvenimento esterno osservato direttamente o per mezzo di dispositivi.

Metodo scientifico

Si può schematizzare la metodologia della fisica come:

- Individuazione del fenomeno fisico da studiare
- Risulta descritto da un certo numero di caratteristiche dette **grandezza fisica**, ognuna valutabile quantitativamente per mezzo di operazioni di confronto con un'altra grandezza fisica ad essa omogenea assunta come campione. Tali operazioni di confronto sono dette **operazioni di misura** ed i risultati sono le **misure**
- Misurare una grandezza significa quindi determinare il numero che esprime il rapporto tra la grandezza fisica ed il **campione**, chiamato quindi **unità di misura**
- L'elaborazione delle misure e effettuate fornisce informazioni sul legame tra le diverse grandezze usate per descrivere un fenomeno
- Un'operazione di misura può essere anche indiretta. Individuate alcune grandezze misurabili direttamente (fondamentali), altre (derivate) possono essere definite e misurate mediante relazioni con le grandezze fondamentali.

Metodo scientifico

ATTIVITÀ SPERIMENTALE

ATTIVITÀ TEORICA



Formulazione delle ipotesi relative al fenomeno

Individuazione ed analisi del fenomeno

Individuazione del metodo da seguire

È necessaria l'osservazione preliminare del fenomeno e l'acquisizione delle informazioni utili allo studio.

- Scelta degli strumenti

- Verifica della fattibilità

Su tale base si individuano le grandezze fisiche che si pensa caratterizzino il fenomeno, siano

determinanti per l'interpretazione. Tali grandezze saranno l'oggetto della misura

- Raccolta dei dati sperimentali

- Analisi dei dati per ottenere le grandezze fisiche

Dimensioni fisiche

Qualsiasi grandezza misurata direttamente può essere definita fondamentale. Di queste sono state scelte dei sottoinsiemi (insieme alle relative unità di misura) con cui descrivere tutte le altre.

È necessario (ed anche sufficiente) definire almeno una grandezza fondamentale. Ciononostante si preferisce definirne un numero più elevato per chiarezza delle espressioni derivate.

Le operazioni algebriche su grandezze fondamentali F_i con cui è definita una grandezza derivata D sono indicate con le dimensioni fisiche delle grandezza. Se D e ed F_i sono legate da: $D = c \prod_i F_i^{\alpha_i}$ (con Π un operatore generico), allora la relazione tra le dimensioni è convenzionalmente scritta come

$$[D] = \prod_i [F_i]^{\alpha_i}$$

Dove [] indica la dimensione della grandezza fisica.

Esempio

Grandezze fondamentali per la meccanica (L, t, M)

Con questa scelta:

Superficie	$[S] = [L]^2[t]^0[M]^0$
Volume	$[V] = [L]^3[t]^0[M]^0$
Velocità	$[v] = [L][t]^{-1}[M]^0$
Accelerazione	$[a] = [L][t]^{-2}[M]^0$
Densità	$[\rho] = [L]^{-3}[t]^0[M]^1$
Forza	$[F] = [L][t]^{-2}[M]^1$

Considerazioni

- le dimensioni non definiscono la grandezza fisica
- poiché un cambiamento di unità non influisce sulla validità della legge, grandezze fisiche o loro funzioni possono essere legate da uguaglianze in una legge fisica solo se i due membri hanno le stesse dimensioni. Infatti l'uguaglianza indica l'equivalenza delle operazioni di misura.
- Può essere quindi necessario, per esprimere una data legge, introdurre dei coefficienti con dimensioni opportune, ed un valore numerico dipendente dal sistema di unità di misura. Ad esempio per la legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

G ha le dimensioni

$$G = [L]^3 [t]^{-2} [M]^{-1}$$

- Per essere usate come argomenti di funzioni ($\sin x$, e^{-x} ...) le grandezze fisiche devono sempre essere combinate in modo da avere argomenti adimensionali...come evidente da

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

Cambiamento di dimensioni

Se vengono introdotte nuove grandezze fondamentali H_j a sostituzione delle F_i , dobbiamo determinare le dimensioni delle F_i nel nuovo sistema:

$$[F_i] = \prod_j [H_j]^{\beta_{ij}}$$

E quindi valutare le dimensioni delle grandezze derivate:

$$[D] = \prod_i [F_i]^{\alpha_i} = \prod_i \left(\prod_j [H_j]^{\beta_{ij}\alpha_i} \right) = \prod_j [H_j]^{\sum_i \alpha_i \beta_{ij}} = \prod_j [H_j]^{\eta_j}$$

Con gli η che sono elementi del vettore ottenuti dal prodotto del vettore α per la matrice β :

$$(\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esempio: S.I. → sistema di unità naturali

Il sistema di unità naturali è usato frequentemente in fisica delle particelle ed in particolare dai teorici. In esso si pone $\hbar = c = 1$, ovvero la costante di Planck ridotta \hbar (universale) e la velocità della luce nel vuoto c (universale) pari ad 1 ed adimensionali.

È facile dimostrare che per la meccanica questa scelta implica l'uso di una sola unità fondamentale, la lunghezza.

$$\text{Nel S.I. } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,726(47) \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \qquad c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$$

Essendo infatti la velocità adimensionale, tempo e lunghezza devono avere la stessa dimensione nel sistema di unità naturali; ovvero $[t]_{u.n.} = [L]_{u.n.}$.

Essendo l'azione (energia per tempo) adimensionale (e per la relazione sopra) la massa deve avere le dimensioni dell'inverso di una lunghezza; ovvero $[M]_{u.n.} = [L]_{u.n.}^{-1}$.

$$\begin{aligned} [L]_{u.n.} &= [L]_{S.I.}^1 \\ \text{Quindi: } [t]_{u.n.} &= [L]_{S.I.}^1 \quad \text{o } (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{La velocità è quindi: } (\eta_j)_v = (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ [M]_{u.n.} &= [L]_{S.I.}^{-1} \end{aligned}$$

[calcolare le dimensioni per l'energia]

Generalità

Una determinata scelta di unità fondamentali costituisce un sistema di unità di misura.

Due sistemi possono differire:

- per una diversa scelta di unità fondamentali
- per una diversa definizione dei campioni di misura
- per entrambe

Le unità di misura U di grandezze derivate si ottengono dalla prima definizione $D = k \prod_i F_i^{\alpha_i}$, indicando con U^{α_i} le unità di misura delle grandezze fondamentali:

$$U(D) = k(D) \prod_i U^{\alpha_i}(F_i)$$

Si definiscono:

- **coerenti**, le unità di misura per cui $k = 1$
- **non coerenti** in caso contrario

[ad esempio, l'unità di pressione atmosferica ($1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$) è un'unità di misura non coerente, ma molto usata]

IMPORTANTE: seppure la scelta delle unità fondamentali è arbitraria è necessario che:

- siano definite senza ambiguità
- siano costanti nel tempo e nello spazio

SISTEMA INTERNAZIONALE (S.I.)

Grandezza di base		Unità di base	
Nome della grandezza di base	Simbolo	Nome dell'unità di misura base	Simbolo
lunghezza	$l, x, r, \text{etc.}$	metro	m
massa	m	chilogrammo	kg
tempo, durata	t	secondo	s
corrente elettrica	I, i	ampere	A
temperatura termodinamica	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	I_v	candela	cd

http://www.periodni.com/it/unita_del_sistema_internazionale.html

S.I. – Definizione delle unità

grandezza	unità	simbolo	definizione
lunghezza	metro	<i>m</i>	tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un tempo di 1/299 792 458 di secondo
massa	kilogrammo	<i>kg</i>	massa del campione platino-iridio, conservato nel Museo Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres (Parigi)
intervallo di tempo	secondo	<i>s</i>	durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133 $^{133}_{55}\text{Cs}$
intensità di corrente elettrica	ampere	<i>A</i>	quantità di corrente che scorre all'interno di due fili paralleli e rettilinei, di lunghezza infinita e sezione trascurabile, immersi nel vuoto ad una distanza di un metro, induce in loro una forza di attrazione o repulsione di 2×10^{-7} N per ogni metro di lunghezza
temperatura termodinamica	kelvin	<i>K</i>	valore corrispondente a 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua
quantità di sostanza	mole	<i>mol</i>	quantità di materia di una sostanza tale da contenere tante particelle elementari quante ne contengono 0,012 kg di carbonio-12 $^{12}_6\text{C}$. Tale valore corrisponde al numero di Avogadro
intensità luminosa	candela	<i>cd</i>	intensità luminosa di una sorgente che emette una radiazione monocromatica con frequenza 540×10^{12} Hz e intensità energetica di 1/683 W/sr.

SISTEMA INTERNAZIONALE

Definito dal Bureau International des Poids et Measures (<http://www.bipm.org/en/about-us/>),

- “the intergovernmental organization through which Member States act together on matters related to measurement science and measurement standards.”

L'attuale standard è definita nella: SI Brochure: The International System of Units (SI) [8th edition, 2006; updated in 2014]

<http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>

In cui trovate anche il PDF completo

http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8.pdf

Definizioni precedenti.

Se guardiamo le definizioni attuali osserviamo la necessità di svincolare le unità di misura fondamentali dai campioni materiali, per associarle a fenomeni fisici.

I vantaggi di tale intento sono una maggiore e fedele riproducibilità, in quanto le costanti universali sono conosciute con tolleranze minime, ed inoltre i campioni non sono soggetti ad alterazioni ambientali.

METRO:

- nel 1799 era determinato dalla lunghezza di una sbarra di platino, pari ad un quaranta milionesimo della lunghezza del meridiano terrestre;
- nel 1875 era riferito alla distanza delle due tacche incise sulla sbarra campione di platino(90%)-iridio(10%), conservata a temperatura costante (0°C) nell' Ufficio Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres di [Parigi](#);
- nel 1960 era rappresentato da 1650763,73 lunghezze d'onda, nel vuoto, della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli $2p^{10} 5d^5$ dell'atomo del cripto-86;
- nel 1983 è quella attualmente in uso.

KILOGRAMMO: coincidente con la massa di 1 dm^3 di acqua distillata posta alla temperatura di 4°C.

SECONDO:

- prima del 1960 era rappresentato dalla 86400^a parte del giorno solare medio;
- dopo il 1960 era determinato da una frazione dell'anno tropico (tempo impiegato dal Sole per tornare nella stessa posizione, vista dalla Terra) alla data del 1900;
- nel 1967 è quella attualmente in uso.

CANDELA:

- prima del 1982 era definita da $1/60$ dell'intensità luminosa emessa dal radiatore integrale (corpo nero) alla temperatura di solidificazione del platino (2045 K°), in direzione perpendicolare al foro di uscita della radiazione dal radiatore, essendo l'area del foro pari ad 1 cm^2 ;
- dopo 1982 è quella attualmente in uso.

S.I. – Unità derivate

Grandezza derivata		Unità SI derivata	
Nome	Simbolo	Nome	Simbolo
area	A	metro quadrato	m^2
volume	V	metro cubo	m^3
velocità	v	metro al secondo	$m s^{-1}$
accelerazione	a	metro al secondo quadrato	$m s^{-2}$
numero d'onda	σ	metro alla meno uno	m^{-1}
densità, massa volumica	ρ	kilogrammo al metro cubo	$kg m^{-3}$
densità superficiale	ρ_A	kilogrammo al metro quadrato	$kg m^{-2}$
volume specifico	v	metro cubo al kilogrammo	$m^3 kg^{-1}$
densità di corrente (elettrica)	j	ampere al metro quadro	$A m^{-2}$
(intensità di) campo magnetico	H	ampere al metro	$A m^{-1}$
concentrazione (di quantità di sostanza)	c	mole al metro cubo	$mol m^{-3}$
concentrazione di massa/ densità	ρ, γ	kilogrammo al metro cubo	$kg m^{-3}$
luminanza	L_v	candela al metro quadro	$cd m^{-2}$
indice di rifrazione	n	(il numero) uno	1
permeabilità relativa	μ_r	(il numero) uno	1

S.I. – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivate	Unità SI derivata			
	Nome	Simbolo	Espressa in termini di altre unità SI	Espressa in termini delle unità SI di base
angolo piano	radiante	<i>rad</i>	1	$m m^{-1}$
angolo solido	steradiano	<i>sr</i>	1	$m^2 m^{-2}$
Frequenza	hertz	<i>Hz</i>		s^{-1}
Forza	newton	<i>N</i>		$m kg s^{-2}$
pressione, sforzo	pascal	<i>Pa</i>	N/m^2	$m^{-1} kg s^{-2}$
energia, lavoro, quantità di calore	joule	<i>J</i>	$N m$	$m^2 kg s^{-2}$
potenza, flusso radiante	watt	<i>W</i>	J/s	$m^2 kg s^{-3}$
carica elettrica, quantità di elettricità	coulomb	<i>C</i>		$s A$
differenza di potenziale elettrico, forza elettromotrice	volt	<i>V</i>	W/A	$m^2 kg s^{-3} A^{-1}$
capacità (elettrica)	farad	<i>F</i>	C/V	$m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2$
resistenza elettrica	ohm	Ω	V/A	$m^2 kg s^{-3} A^{-2}$
conduttanza elettrica	siemens	<i>S</i>	A/V	$m^{-2} kg^{-1} s^3 A^2$
flusso magnetico	weber	<i>Wb</i>	$V s$	$m^2 kg s^{-2} A^{-1}$
densità di flusso magnetico	tesla	<i>T</i>	Wb/m^2	$kg s^{-2} A^{-1}$
induttanza	henry	<i>H</i>	Wb/A	$m^2 kg s^{-2} A^{-2}$
temperatura Celsius	grado Celsius	$^{\circ}C$		<i>K</i>
flusso luminoso	lumen	<i>lm</i>	$cd sr$	<i>cd</i>
luminanza	lux	<i>lx</i>	lm/m^2	$m^{-2} cd$
attività di un radionuclide	becquerel	<i>Bq</i>		s^{-1}
dose assorbita, energia specifica (impartita), kerma	gray	<i>Gy</i>	J/kg	$m^2 s^{-2}$
equivalente di dose (ambientale, direzionale, personale)	sievert	<i>Sv</i>	J/kg	$m^2 s^{-2}$

S.I. – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivata	Nome	Unità SI derivata	
		Simbolo	Espressa in termini delle unità SI di base
viscosità dinamica	pascal per secondo	<i>Pa s</i>	$m^{-1} kg s^{-1}$
momento di una forza	newton per metro	<i>N m</i>	$m^2 kg s^{-2}$
tensione superficiale	newton al metro	<i>N/m</i>	$kg s^{-2}$
velocità angolare	radiante al secondo	<i>rad/s</i>	$m m^{-1} s^{-1} = s^{-1}$
accelerazione angolare	radiante al secondo quadrato	<i>rad/s²</i>	$m m^{-1} s^{-2} = s^{-2}$
densità di flusso di calore, irradianza	watt al metro quadro	<i>W/m²</i>	$kg s^{-3}$
capacità termica, entropia	joule al kelvin	<i>J/K</i>	$m^2 kg s^{-2} K^{-1}$
capacità termica specifica, entropia specifica	joule al kilogrammo e al kelvin	<i>J/(kg K)</i>	$m^2 s^{-2} K^{-1}$
energia specifica	joule al kilogrammo	<i>J/kg</i>	$m^2 s^{-2}$
conducibilità termica	watt al metro e al kelvin	<i>W/(m K)</i>	$m kg s^{-3} K^{-1}$
densità di energia	joule al metro cubo	<i>J/m³</i>	$K^{-1} kg s^{-2}$
(intensità di) campo elettrico, forza elettrica	volt al metro	<i>V/m</i>	$m kg s^{-3} A^{-1}$
densità di carica elettrica	coulomb al metro cubo	<i>C/m³</i>	$m^{-3} s A$
densità superficiale di carica	coulomb al metro quadro	<i>C/m²</i>	$m^{-2} s A$
densità di flusso elettrico, spostamento elettrico	coulomb al metro quadro	<i>C/m²</i>	$m^{-2} s A$
permettività	farad al metro	<i>F/m</i>	$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
permeabilità	henry al metro	<i>H/m</i>	$m kg s^{-2} A^{-2}$
energia molare	joule alla mole	<i>J/mol</i>	$m^2 kg s^{-2} mol^{-1}$
entropia molare, capacità termica molare	joule alla mole e al kelvin	<i>J/(mol K)</i>	$m^2 kg s^{-2} K^{-1} mol^{-1}$
esposizione (a raggi X e γ)	coulomb al kilogrammo	<i>C/kg</i>	$kg^{-1} s A$
rateo di dose assorbita	gray al secondo	<i>Gy/s</i>	$m^2 s^{-3}$
intensità di radiazione	watt allo steradiante	<i>W/sr</i>	$m^4 m^{-2} kg s^{-3} = m^2 kg s^{-3}$
radianza	watt al metro quadro e allo steradiante	<i>W/(m² sr)</i>	$m^2 m^{-2} kg s^{-3} = kg s^{-3}$

Unità non nel S.I. accettate per uso nel S.I.

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità	Valore in unità SI
tempo, durata	minuto	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	ora	<i>h</i>	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$
	giorno	<i>d</i>	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$
angolo piano	grado	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	minuto	'	$1' = (1/60)^\circ$ $= (\pi/10\,800) \text{ rad}$
	secondo	"	$1'' = (1/60)'$ $= (\pi/648\,000) \text{ rad}$
area	ettaro	<i>ha</i>	$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ m}^2$
volume	litro	<i>L, l</i>	$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
massa	tonnellata	<i>t</i>	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$

Unità non nel S.I. accettate per uso nel S.I.

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità	Valore in unità SI
Unità accettate per l'uso con il SI			
energia	elettronvolt	eV	$1 eV = 1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19} J$
massa	dalton	Da	$1 Da = 1.660\,538\,86(28) \times 10^{-27} kg$
	unità unificata di massa atomica	u	$1 u = 1 Da$
lunghezza	unità astronomica	ua	$1 ua = 1.495\,978\,706\,91(6) \times 10^{11} m$
Unità naturali			
velocità	unità naturale della velocità (velocità della luce nel vuoto)	c_0	$299\,792\,458 m s^{-1}$
azione	unità naturale di azione (costante di Planck ridotta)	\hbar	$1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34} Js$
massa	unità naturale di massa (massa dell'elettrone)	m_e	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31} kg$
tempo, durata	unità naturale del tempo	$\hbar/(m_e c^2)$	$1.288\,088\,667\,7(86) \times 10^{-21} s$
Unità atomiche			
carica	unità atomica di carica (carica elementare)	e	$1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19} C$
massa	unità atomica di massa (massa dell'elettrone)	m_e	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31} kg$
azione	unità atomica di azione (costante di Planck ridotta)	\hbar	$1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34} Js$
lunghezza	unità atomica di lunghezza (raggio del Bohr)	a_0	$0.529\,177\,210\,8(18) \times 10^{-10} m$
energia	unità atomica di energia (energia di Hartree)	E_h	$4.359\,744\,17(75) \times 10^{-18} J$
tempo, durata	unità atomica del tempo	\hbar/E_h	$2.418\,884\,326\,505(16) \times 10^{-17} s$

Valore in S.I. ottenuto sperimentalmente

Unità non S.I.

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità	Valore in unità SI
pressione	bar	<i>bar</i>	$1 \text{ bar} = 0.1 \text{ MPa} = 10^5 \text{ Pa}$
	millimetro di mercurio	<i>mm Hg</i>	$1 \text{ mm Hg} \approx 133.322 \text{ Pa}$
lunghezza	angström	Å	$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
distanza	miglio marino	<i>M</i>	$1 \text{ M} = 1852 \text{ m}$
area	barn	<i>b</i>	$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$
velocità	nodo	<i>kn</i>	$1 \text{ kn} = (1852/3600) \text{ m s}^{-1}$
quantitativi rapporto logaritmico	neper	<i>Np</i>	
	bel	<i>B</i>	
	decibel	<i>dB</i>	

Prefissi di multipli e sottomultipli

Fattore	Nome	Simbolo	Fattore	Nome	Simbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	<i>d</i>
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	<i>c</i>
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	<i>m</i>
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	<i>n</i>
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	<i>p</i>
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	<i>f</i>
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	<i>a</i>
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	<i>z</i>
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	<i>y</i>

La misura

Misurare

Trasformare caratteristiche osservabili di oggetti in serie ordinate di numeri

Misura di una grandezza

Rapporto tra una grandezza ed un'altra ad essa omogenea, scelta come unità di misura

Tutte le misure sono soggette ad **INCERTEZZA**



Definizioni

INCERTEZZA: parametro che misura la dispersione dei valori che possono essere attribuiti al misurando.

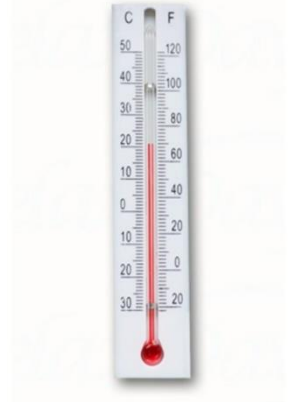
ERRORE: differenza tra il risultato di una misura ed il valore “vero” del misurando.

Incertezza della misura

- Ripetizioni di misure con un risultato non identico sono il risultato di incertezze di misura
- Le condizioni sperimentali non possono essere ripetute esattamente
- L'ipotesi della teoria della misura è che i risultati di misura approssimano il valore **vero**
⇒ **il valore vero esiste**
- È indispensabile l'elaborazione delle misure
- La grandezza fisica fondamentale può essere misurata per confronto diretto con un campione (abbiamo visto che ciò è stato abbandonato per dal BIPM)
- Grandezze fisiche derivate
 - Da combinazione di grandezze fisiche fondamentali
 - Misure indirette
- Strumento di misura
 - Permette il confronto delle grandezze con l'unità di misura
 - È composto da un rivelatore (sensibile alla grandezza da misurare)
 - Da un trasduttore (eventualmente, ovvero un dispositivo che legge una grandezza presente in **ingresso** e ne genera un'altra in **uscita**, proporzionale alla prima.)
 - Dispositivo per la presentazione dei risultati

Strumenti di misura

ANALOGICI



Ordini di grandezza

L'**ORDINE DI GRANDEZZA** di un numero è la **POTENZA DEL 10 PIU' VICINA AL NUMERO CONSIDERATO**.

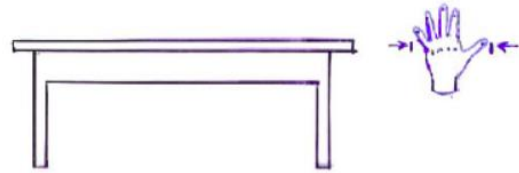
Dato un numero **a** il suo **ORDINE DI GRANDEZZA** viene indicato con **ODG (a)**.

Per determinare l'**ORDINE DI GRANDEZZA** di un numero possiamo:

- Scrivere il numero in **NOTAZIONE SCIENTIFICA** $a = k \times 10^n$ con $1 \leq k < 10$
- Quindi $ODG(a) = \begin{cases} 10^n & \text{se } |k| < 5 \\ 10^{n+1} & \text{se } |k| \geq 5 \end{cases}$

	NOTAZIONE SCIENTIFICA	Cos'è	ODG(a)
6 371 km	$6.371 \times 10^6 m$	Raggio terrestre	$10^7 m$
9 999 t	$9.999 \times 10^6 kg$	Peso torre Eiffel	$10^7 kg$
384 400 km	$3.844 \times 10^5 m$	Distanza terra-luna	$10^5 m$
149 600 000 km	$1.496 \times 10^8 m$	Distanza terra-sole	$10^8 m$

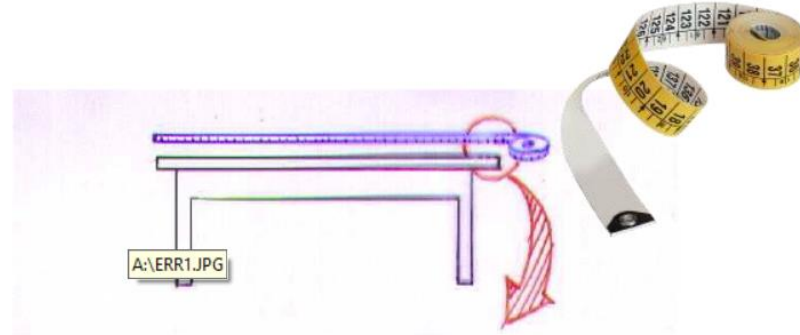
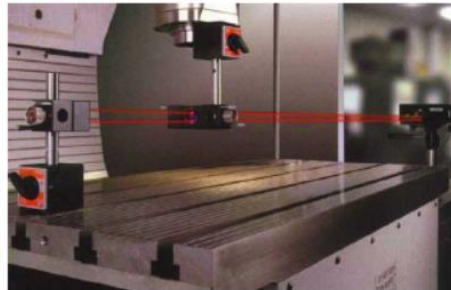
Misure ed errore



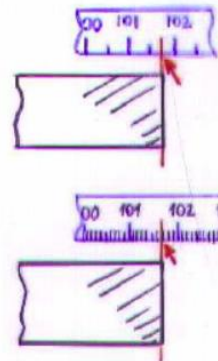
~1 m
(± qualche cm)



Ma qual è la lunghezza?



A:\ERR1.JPG



~101.7 cm
(± qualche mm)



~101.69 cm
(± qualche 0.1 mm)

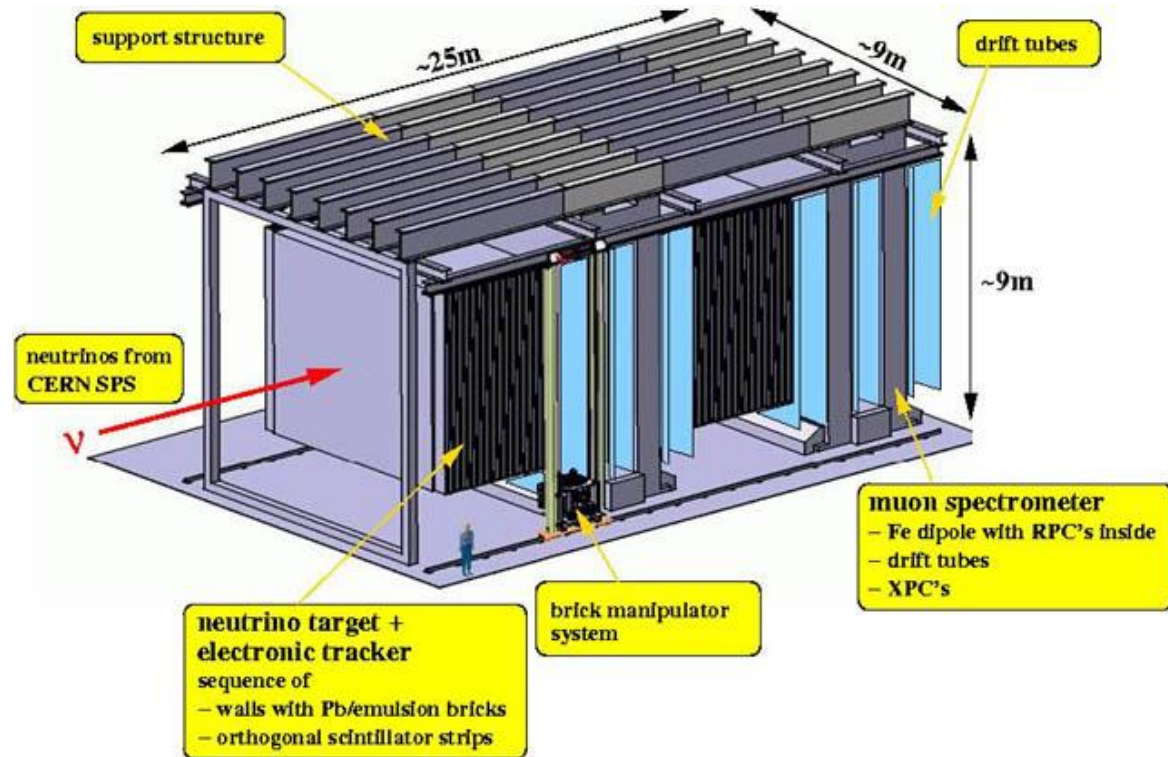
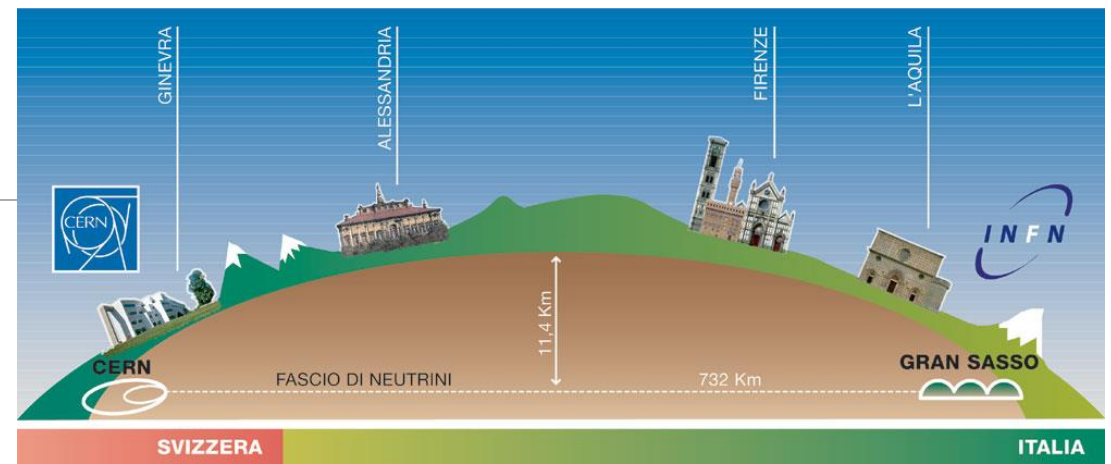
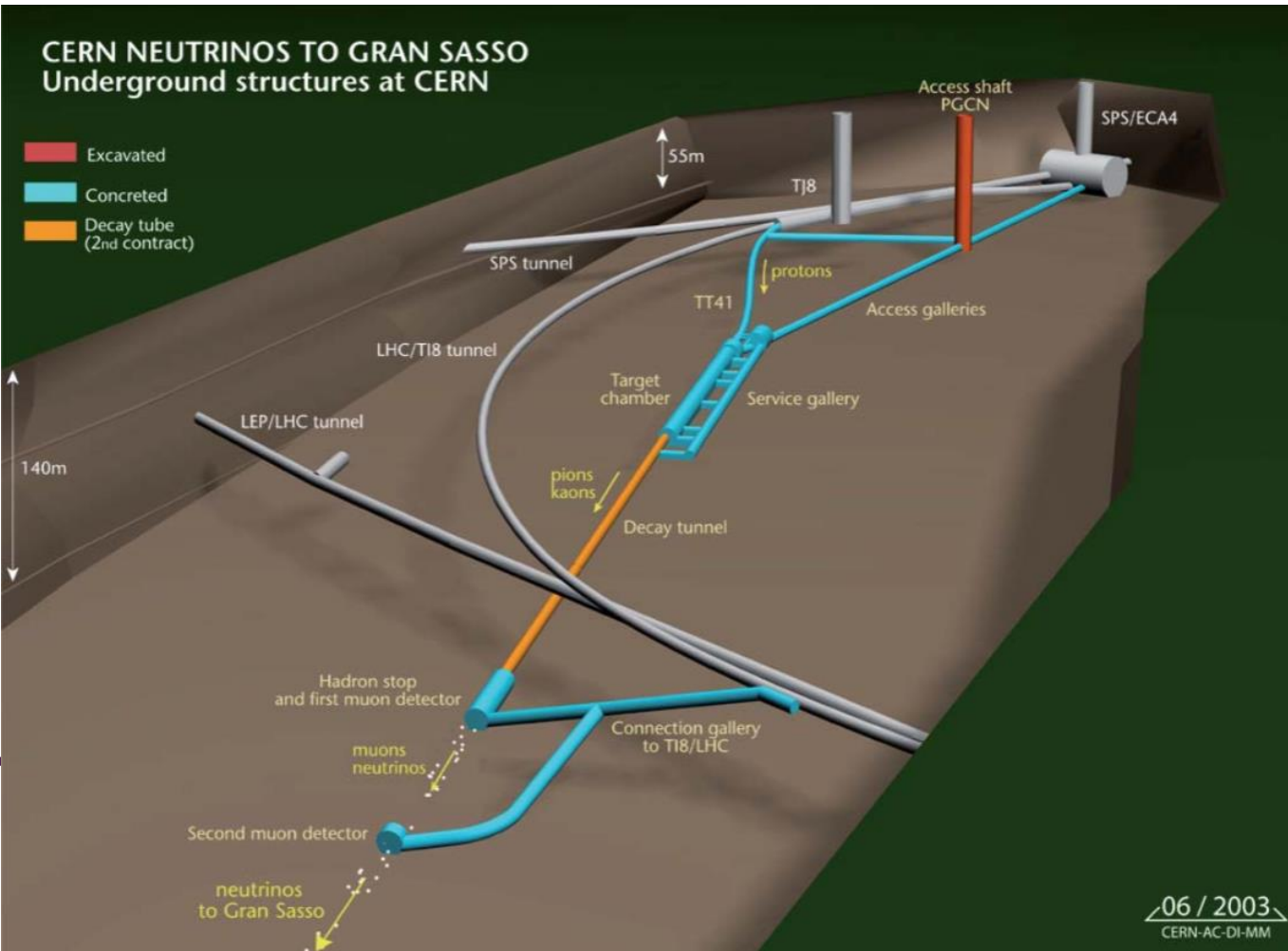


~101.68435734 cm
(± 10⁻⁶ m)

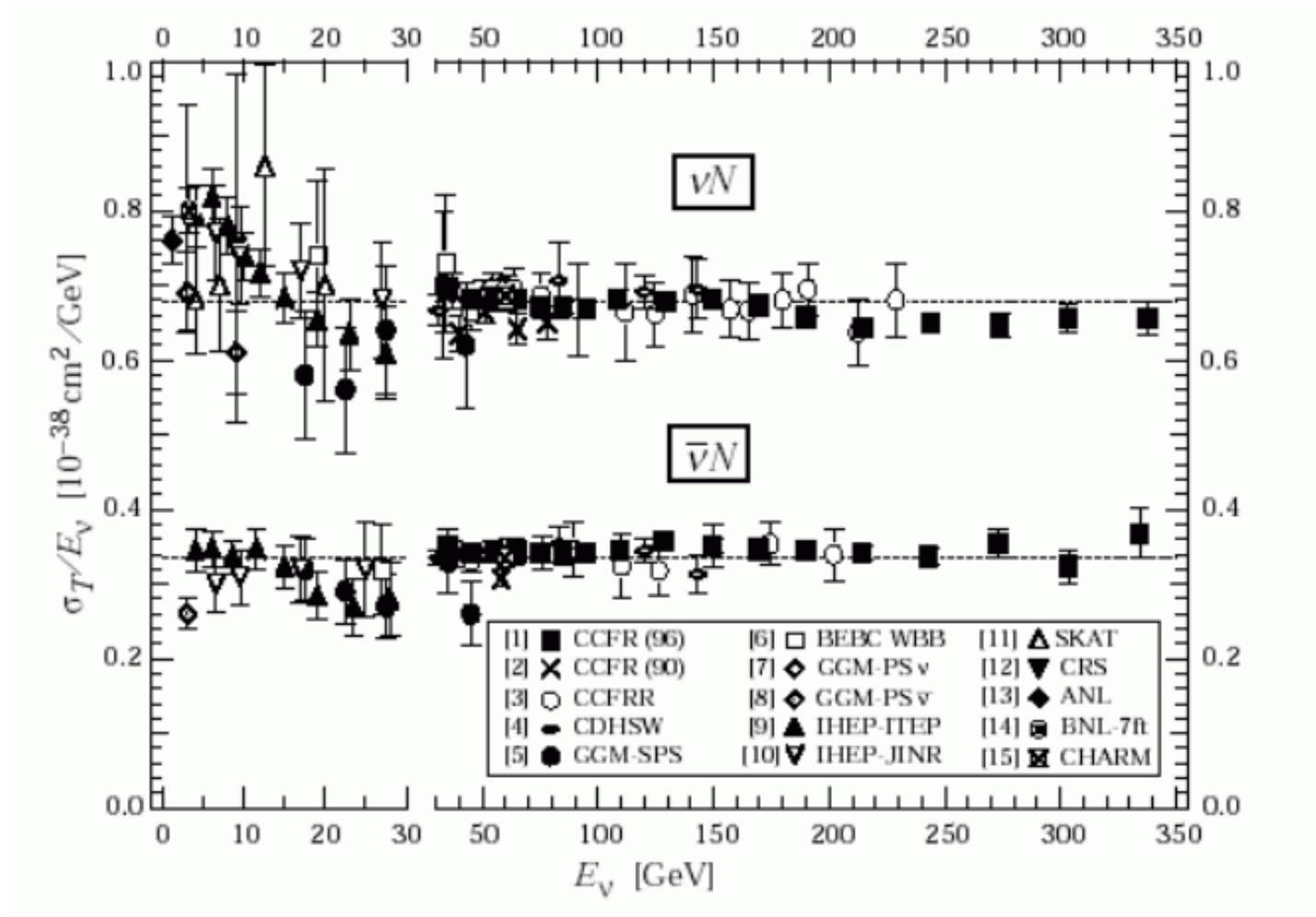
Errori di misura

- Valutazione dell'incertezza associata alle misure finalizzata a:
 - Minimizzare l'errore
 - Accertare la validità dei risultati
- Da ribadire: il valore vero è un concetto ed è non misurabile e non noto
- Definizioni [REPETITA IUVANT]
 - **Errore, scarto o deviazione**: differenza tra **valore misurato** e **valore vero**
 - **Incetezza**: **dispersione dei valori** espressa come deviazione standard, errore probabile, indice di precisione

Importanza degli errori



Sezione d'urto dei neutrini...



Due conti

Fascio di neutrini del CERN per i LNGS: 2 estrazioni di $10.5\mu s$ separate da 50ms ogni 6 secondi.

(produzione dei neutrini: protoni da 300-400 GeV su bersaglio di berillio: $p \text{ Be} \rightarrow \pi K X$ con i pioni che successivamente decadono $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ e $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ con vite medie dell'ordine di $2.6 \times 10^{-8} s$).

Il numero di protoni inviato sul bersaglio ogni 10s è dell'ordine di 10^{13} , e nello stesso tempo sono prodotti $\sim 5 \times 10^7$ neutrini, ma di questi solo l'10% circa colpisce la superficie del rivelatore di Opera. Il flusso utile sul rivelatore è quindi pari a $\phi_\nu \sim 5 \times 10^5 \nu/s$ su tutta la superficie del rivelatore ($5m^2$). Quindi il flusso per unità di superficie (cm^2) è $\phi_\nu \sim 10 \nu/(s \cdot cm^2)$

Ipotizziamo che il bersaglio di OPERA (emulsioni) sia pari a 10T di carbonio. Il numero di nucleoni (protoni/neutroni) su cui i neutrini possono interagire dando un segnale è:

$$N_{CD} = 12 \frac{10^4 \text{ kg}}{1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 5 \times 10^{32}$$

La sezione d'urto totale per i neutrini di 20 GeV è di $\sigma_T = 20 \times 0.7 \times 10^{-38} = 1.5 \times 10^{-37} \text{ cm}^2$,

La rate è quindi data da:

$$Rate = \frac{\text{numero segnali}}{s} = \phi_\nu \cdot N_{cd} \cdot \sigma_T \cdot \varepsilon = 10 \times 5 \times 10^{32} \times 1.5 \times 10^{-37} = 7.5 \times 10^{-4} s^{-1}$$

3 anni di presa dati sono $10^8 s$ quindi il numero di eventi totale che mi aspetto, con questi conti, è:

$$10^8 \times 7.5 \times 10^{-4} \sim 10^5$$

Misura del tempo di volo si basa su 10^{20} protoni dell'SPS del CERN con un segnale totale di 15223 neutrini rivelati.

Importanza degli errori

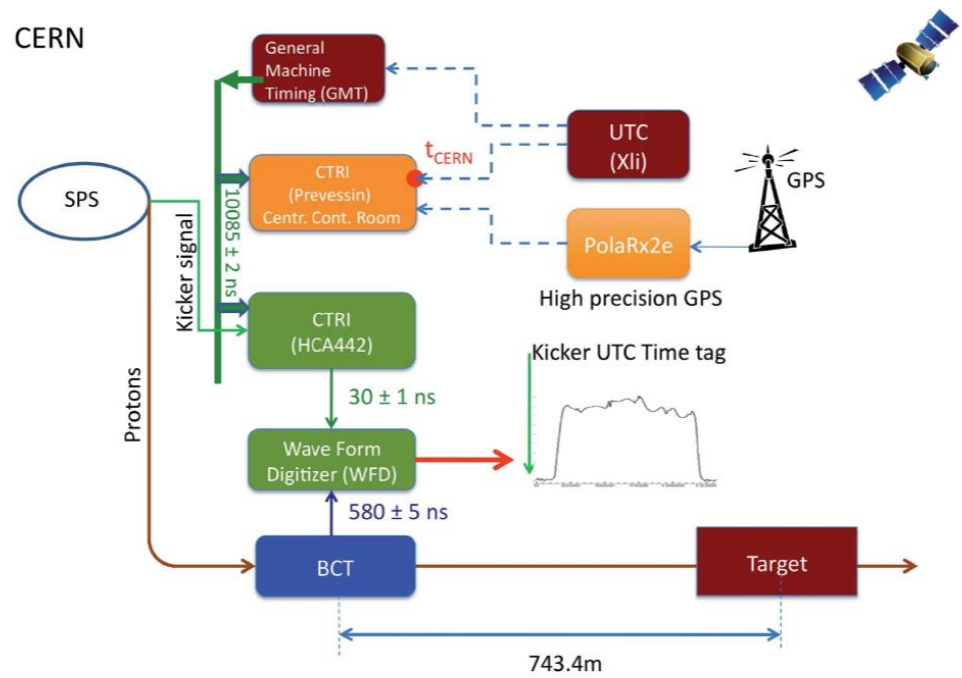


Figure 3. Schematic of the CERN SPS/CNGS timing system. Green boxes indicate detector time-response. Orange boxes refer to elements of the CNGS-OPERA synchronisation system. Details on the various elements are given in Section 6.

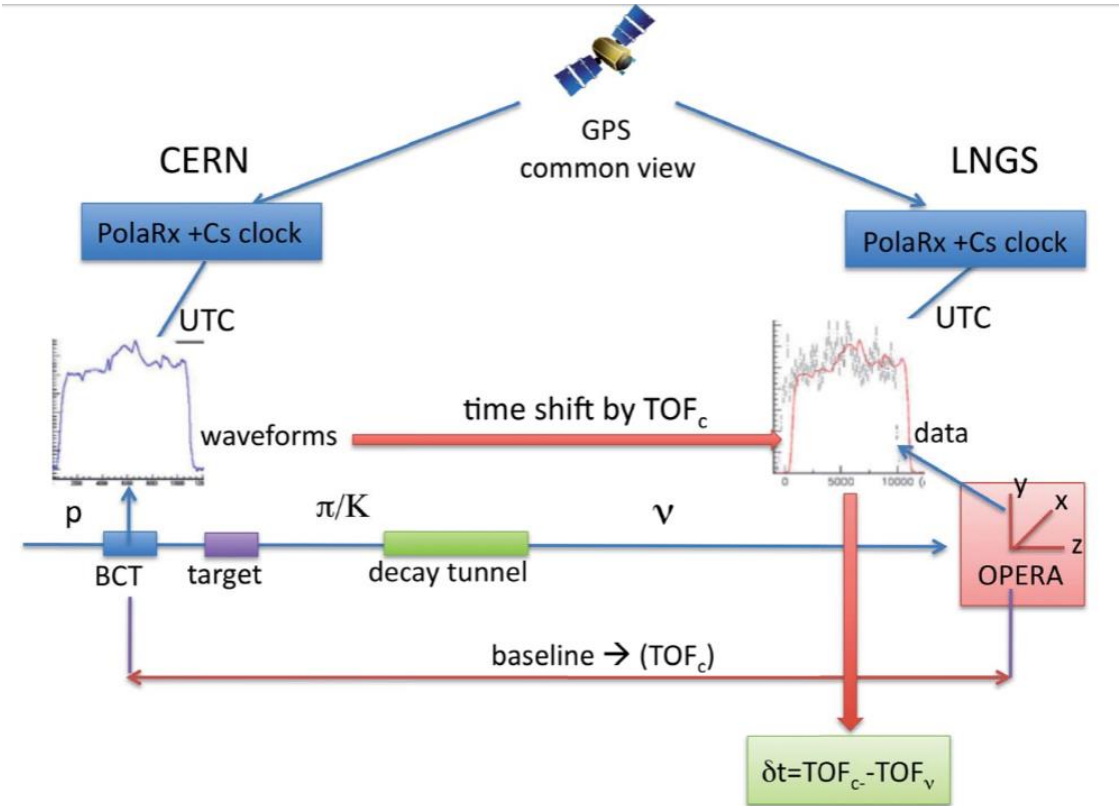


Figure 5. Schematic of the time of flight measurement.

Importanza degli errori

First result: early arrival by: $60.7 \text{ ns} \pm 6.9 \text{ ns}$

Table 2. Contribution to the overall systematic uncertainty on the measurement of δt .

Error source	ns	Error distribution
Baseline (20 cm)	0.67	Gaussian
Meson decay point	0.2	Exponential (1 side)
Interaction point of external neutrino events	2.0	Flat (1 side)
CTRI signal propagation through GMT chain Δt_{UTC}	2.0	Gaussian
Kicker magnet signal to WFD $\Delta t_{trigger}$	1.0	Gaussian
BCT calibration Δt_{BCT}	5.0	Gaussian
CNGS-OPERA GPS synchronisation	1.7	Gaussian
LNGS 8.3 km fibre to OPERA Master Clock	3.7	Gaussian
Master Clock to FPGA Δt_{clock}	1.0	Gaussian
TT PMT signal to FPGA	2.3	Gaussian
TT timing simulation of ν interactions	3.0	Gaussian
FPGA latency	1.0	Gaussian
RPC signal formation	5.0	Gaussian
RPC signal propagation	1.0	Gaussian
RPC FEB delay	1.0	Gaussian
RPC DAQ clock transmission	2.0	Gaussian
RPC FPGA calibration	1.0	Gaussian
RPC plane disuniformity	3.9	Gaussian
Total systematic uncertainty for TT based analysis	-8.0, +8.3	
Total systematic uncertainty for RPC based analysis	-9.6, +9.9	

The analysis of internal neutral current and charged current events, and external CC interactions from the 2009, 2010 and 2011 CNGS data was carried out to measure neutrino velocity, v . The sensitivity of the measurement of $(v - c)/c$ is about one order of magnitude better than former accelerator neutrino experiments.

The results of the study using CNGS muon neutrinos with an average energy of 3 GeV indicate a neutrino arrival time compatible within errors to the one computed assuming the speed of light in vacuum:

$$\delta t = (6.5 \pm 7.4 \text{ (stat.)}_{-8.0}^{+8.3} \text{ (sys.)}) \text{ ns.}$$

The corresponding relative difference of the muon neutrino velocity and the speed of light is:

$$(v - c)/c = (2.7 \pm 3.1 \text{ (stat.)}_{-3.3}^{+3.4} \text{ (sys.)}) \times 10^{-6}.$$

An alternative analysis in which the likelihood function is built by associating the neutrino interaction to its waveform instead of using the global PDF leads to a compatible value of $\delta t = (3.5 \pm 5.6 \text{ (stat.)}_{-9.1}^{+9.4} \text{ (sys.)}) \text{ ns}$ affected by an additional contribution to the systematic error.

Che cos'è successo

A major problem showed up. On December 6 – 8, measurements took place of the time interval between

- the moment when a signal (a laser pulse) is sent from the lab's GPS timing equipment somewhere on the earth's surface, across 8.3 kilometers down into the underground lab and to OPERA itself, where the laser pulse is converted (in a special device, which I'll just call **the box**) to an electronic signal for use by the OPERA Master Clock, and
- the moment when the Master Clock sends a timing pulse to synchronize all of OPERA's many computers and other devices.

Time delay from the external LNGS Lab to the OPERA Master Clock^(*)

20 Jul 2006	(41001.4 ± 0.3) ns	r.m.s. ~ 3 ns	confirmed in 2007
6-8 Dec 2011	(41074.6 ± 0.5) ns	r.m.s. ~ 6 ns	(73.2 ± 0.6 stat) ns larger than 2006
13 Dec 2011	(41000.0 ± 0.3) ns	r.m.s. ~ 3 ns	consistent with 2006

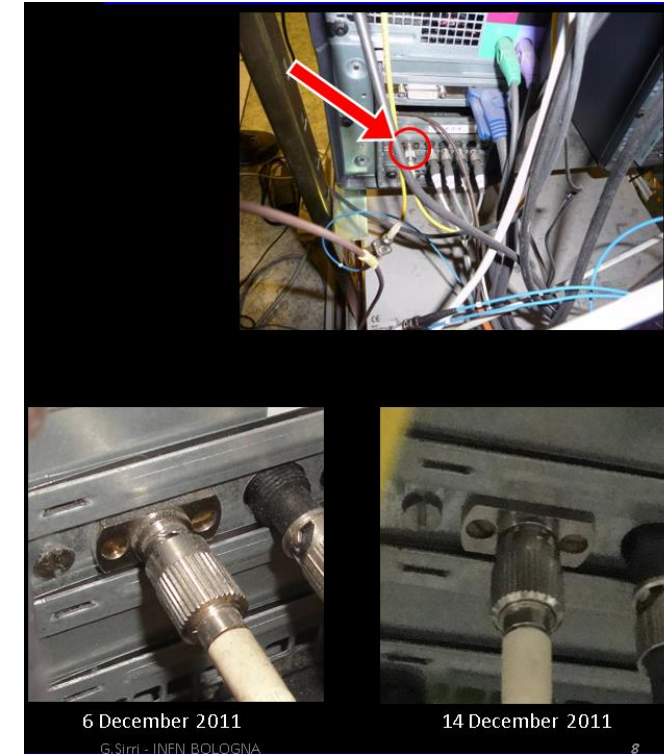
(*) The value quoted in ArXiv:v2 is 40996 and is obtained by subtracting 5.9 ns

- This change was of the right type to potentially cause an apparent early arrival time for the neutrinos, and of roughly the right size to explain OPERA's measurement.

Che cos'è successo

efforts to track down the problem led people to discover that the fiber carrying the laser pulse to OPERA's converter had not been screwed correctly into **the box**.

- this is not a “loose wire”. A copper wire that isn't tightly connected to an electrical lead can cause an electrical device to behave erratically, because electrical current will sometimes flow and sometimes not. But the optical fiber isn't what most people think of as a wire — it carries light, not electrical current; and it wasn't loose, it just wasn't screwed in all the way
- Those within OPERA who were studying this problem found was that when they screwed the optical fiber in tightly, the time interval went right back to 41000 seconds
- But at around the same another problem appeared. They detected some kind of timing *drift*. For technical reasons, OPERA took data in 0.6 second chunks, and cross-checks of measurements suggested that the timing at the end of a chunk was not calibrated properly relative to the beginning of a chunk. So this added confusion to the situation. The drift would also have affected their measurements, though possibly in the other direction, causing neutrinos to apparently arrive *later*.



what was causing the two effects?

Che cos'è successo

Delay measured at an early stage of the amplifier circuit



The effect is related to the charging up of the photodiode capacitance.

The Reset signal sent to the sensors is delayed by the same amount as the MC PPMs.

→ Underestimation of the neutrinos ToF

Che cos'è successo

What about the drift? It turns out the Master Clock itself was not properly calibrated. After it fired with the laser pulse, at the start of each 0.6 second data chunk, it then drifted slightly during the next 0.6 seconds, by a total of 74 nanoseconds. Then it would be re-synchronized 0.6 seconds later (albeit incorrectly, due to the improper fiber connection) by one of the laser pulses coming down the fiber. On average, its drift would have an effect of 37 nanoseconds, but it would be worse at some times and better at others during the 0.6 second chunk of data. **This effect would make the neutrinos appear to arrive late, but turns out to be insufficient to cancel the effect of the fiber.**

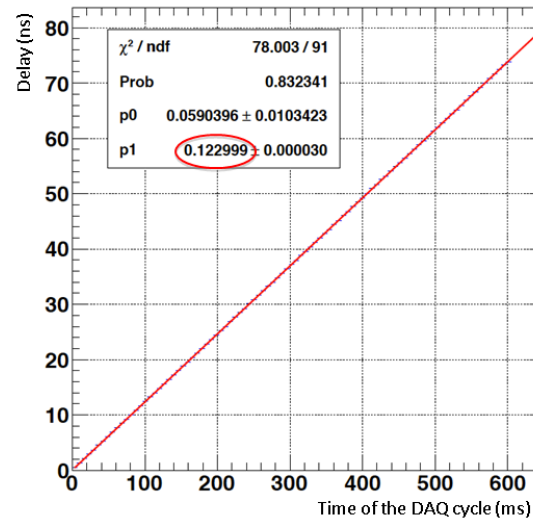
1 Trigger / 1ms
DAQ cycle: 0.6 s

Time delay from 1st trigger of the DAQ cycle
(keeping only the ns digits of the DAQ time)

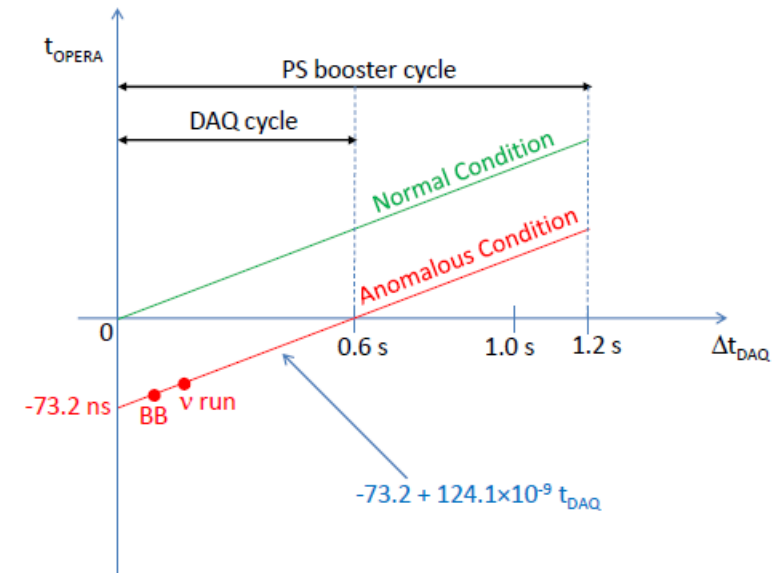
time delay between 2 triggers:
1ms + 0.123 ns

at the end of the DAQ cycle
⇒ 74 ns more

⇒ time drift between the OPERA MC and ESAT GPS2 oscillators



A working model



Caratteristiche degli strumenti di misura

Indichiamo con:

- G – la grandezza fisica
- $M(G)$ – il risultato dell'operazione di misura di G
- $V(G)$ – il valore vero della grandezza fisica ($V(G)=M(G)$ solo se la misura è priva di errore)
- $R(G)$ – la risposta dello strumento usato quale risultato della misura di G

Uno strumento fornisce una risposta, sul dispositivo di visualizzazione, in corrispondenza ad una determinata sollecitazione rilevata dall'elemento sensibile e connessa alla grandezza in misura. Pertanto, per completare l'operazione di misura occorre conoscere la relazione tra la risposta $R(G)$ ed il valore della sollecitazione $V(G)$. Tale relazione si chiama *taratura dello strumento*. Si ricava rilevando la risposta dello strumento per valori di G già noti.

Caratteristiche degli strumenti di misura

Per definire le caratteristiche generali degli strumenti (oltre alle condizioni di funzionamento) devono essere note:

- **L'intervallo di funzionamento**: definito tra il valore massimo – **portata** – ed il valore minimo – **soglia** – della grandezza da misurare che lo strumento è in grado di fornire.
- **La prontezza**: ovvero il tempo necessario affinché' lo strumento risponda ad una variazione della sollecitazione; quanto minore è tale tempo – **tempo caratteristico** – tanto maggiore è la prontezza. Tanto più i tempi di variazione di G sono piccoli rispetto al tempo caratteristico, tanto minore è la capacità dello strumento di misurarli (normale voltmetro ha un tempo caratteristico di 1s, un oscilloscopio di 1ns).
- **La sensibilità**: definita come il rapporto tra la variazione di R(G) e la corrispondente variazione V(G), al limite per variazioni nulle:

$$S = \frac{dR(G)}{dV(G)}$$

Se vi è una relazione lineare tra la risposta ed il valore vero, S è costante, ma in generale S è funzione di V(G).

Caratteristiche degli strumenti di misura

- **L'errore di sensibilità:** per ogni strumento esiste un limite all'accuratezza con cui si può rilevare la risposta. Valori di $R(G)$ che differiscono di meno $2\Delta R(G)$ vengono percepiti come lo stesso valore dall'osservatore. Ciò determina un'incertezza sulla conoscenza del valore $V(G)$ pari a:

$$2\Delta V(G) = \frac{2\Delta R(G)}{S}$$

Il fattore 2 è presente per comodità: l'indeterminatezza sulla lettura del valore di $R(G)$ implica che il valore effettivo è compreso tra $R(G) - \Delta R(G)$ e $R(G) + \Delta R(G)$ che corrisponde ad una grandezza misurata nell'intervallo compreso tra $M(G) - \Delta V(G)$ e $M(G) + \Delta V(G)$. Per convenzione si esprime questa indeterminazione indicando come risultato della misura:

$$M(G) \pm \Delta V(G)$$

Con $\Delta V(G)$ l'errore di sensibilità. In molti strumenti $R(G)$ può assumere valori continui (analogici come calibri, metri, voltmetri) in altri solo discreti (strumenti digitali, contasecondi...). Nel secondo caso, non si può parlare di sensibilità ma solo di errore di sensibilità. Nel primo caso (generalmente) si fa in modo che la suddivisione della scala corrisponda proprio a $2\Delta V(G)$ in modo da poter leggere non solo il valore della misura ma anche il corrispondente errore di sensibilità.

- **La precisione:** fornisce un'indicazione di quanto $R(G)$ non dipende solo da $V(G)$. In ogni dispositivo infatti non possono essere trascurati effetti quali attriti meccanici, tolleranze costruttive, isteresi, fluttuazione di livelli elettrici, noise, che fanno sì che la risposta non sia sempre la stessa per la stessa sollecitazione.

Caratteristiche degli strumenti di misura

- **La ripetibilità:** la capacità dello strumento di fornire la stessa risposta alla stessa sollecitazione.
- **L'affidabilità:** robustezza di funzionamento nel tempo ed in condizioni di lavoro variabili.
- **L'accuratezza:** valore vero \approx valore misurato (ovvero assenza di effetti sistematici)
- **Classe di precisione:**

$$c = 100 \left(\frac{\Delta M_{\max}}{M_{\text{fondo scala}}} \right)$$

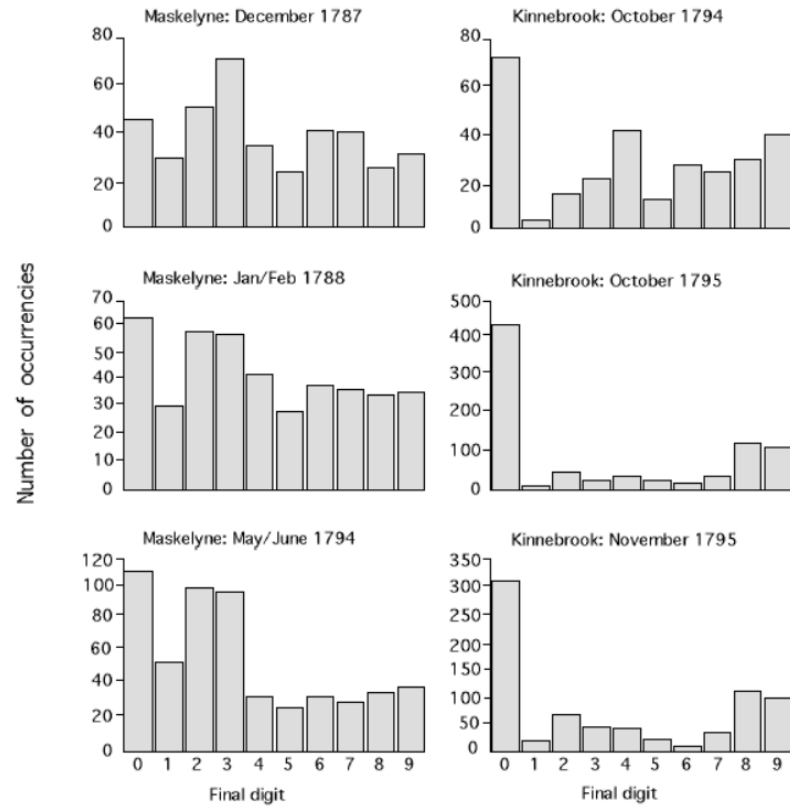
Inciso: regola della mezza divisione

Per un metro, $\Delta x = \frac{1}{2}$ divisione... non corrisponde all'errore di sensibilità. L'occhio umano riesce ad interpolare bene tra due tacche ad un millimetro. Prendete un calibro e confrontate le misure effettuate interpolando tra i millimetri con i valori del nonio. La dispersione delle misure sarà dell'ordine del decimo di millimetro (dell'ordine di 0.07 mm). *Attrezzi da disegno – modalità di controllo per squadre, righe e multi decimetri (UNI 5131)* riporta:

«sulla lunghezza l della parte millimetrata è ammessa una tolleranza di $\pm \frac{0.2 l}{1000}$ »

Che da per letture a fondo scala precisioni di 0.1 mm. DIN infatti dice «line scales mainly have scale numbering with regular spacing and are mostly intended for a continuous reading»

Da un articolo su Nature del 1996



Risultato: Maskelyne licenziò l'assistente Kinnebrooke accusandolo di inaccuratezza nelle letture.



Figura 4: Istogramma dell'ultima cifra significativa nei dati di Maskelyne e in quelli del suo assistente.

Distribuzione delle misure

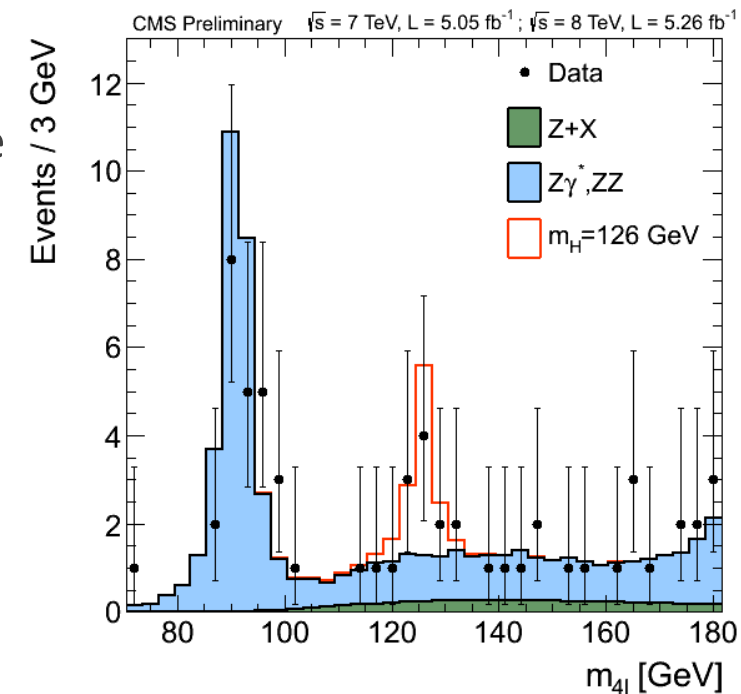
In alcuni casi la ripetizione delle misure di una stessa grandezza non fornisce identici valori per identiche condizioni. Qualitativamente possiamo dare ragione di questo risultato considerando l'assunto di identiche condizioni come una condizione ipotetica non realizzabile microscopicamente:

- Il valore assunto da una grandezza è dovuto all'effetto concomitante di tanti contributi di cui non è possibile tenere conto individualmente (ad esempio l'attrito è il risultato di tanti micro-effetti; correnti e potenziali elettrici sono dovuti al movimento di innumerevoli corpi elettricamente carichi, soggetti ad agitazione termica ed a moti disordinati).
- La non riproducibilità complessiva non è manifesta quando i suoi effetti sono contenuti all'interno l'errore di sensibilità dello strumento di misura,
- Nel caso contrario la non riproducibilità è manifesta, e si riscontra una variabilità delle $M(G)$ messa in evidenza in una particolare rappresentazione grafica chiamata **istogramma**.

Istogramma

Un istogramma si realizza riportando:

- In ascissa i valori possibili di $M(G)$ sono suddivisi in n intervalli di ampiezza opportuna Δ , ma comunque non inferiori a $2\Delta V(G)$.
- Un intervallo i -esimo andrà da $\left(x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right]$, quello successivo da $\left(x_{i+1} - \frac{\Delta}{2}, x_{i+1} + \frac{\Delta}{2}\right]$ con $x_{i+1} - x_i = \Delta$
- L'ordinata dell'intervallo i -esimo sarà il numero ' n_i ' delle misure il cui valore è compreso nell'intervallo $x_{mis} \in \left(x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right]$.
- La scala orizzontale ha l'unità di misura di G (es. mm)
- La scala verticale ha come unità di misura il numero di conteggi nell'intervallo (es. Eventi/5 mm)



Interpretazione

- Un istogramma può a sua volta essere interpretato come la rappresentazione sperimentale di una funzione $f(M(G))$ che tiene conto del modo in cui gli effetti microscopici influiscono su $M(G)$.
- Poiché' non è semplice determinare in modo deduttivo la forma funzionale della funzione f ci si può limitare (per ora) a darne una rappresentazione grafica, cercando poi 'ad occhio' una curva che riproduca la forma dell'istogramma.
- Si usa poi rappresentare sinteticamente il complesso dei valori di $M(G)$ per mezzo di due grandezze significative; date n misure queste sono:
 - La media aritmetica $\bar{M}(G) = \frac{1}{n} \sum_i M_i(G) = \frac{1}{n} \sum_j n_j M_j(G)$
 - La 'stima' della deviazione standard o scarto quadratico medio

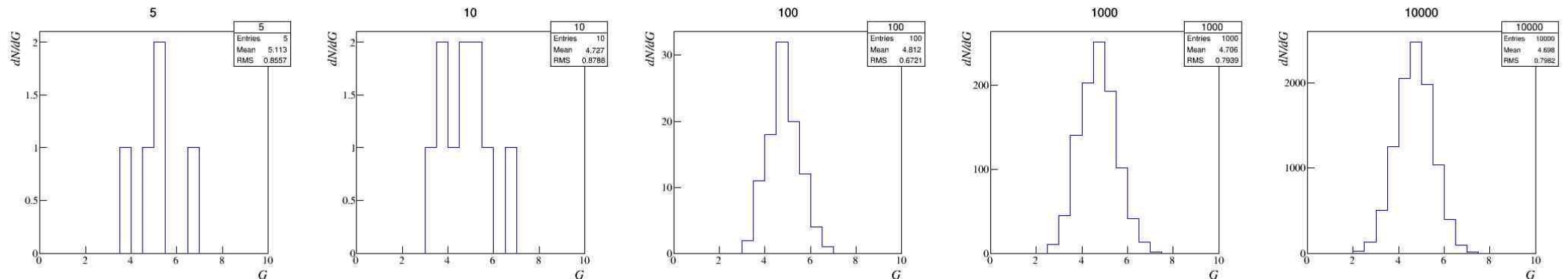
$$\sigma_G = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (M_i(G) - \bar{M}(G))^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_j n_j (M_j(G) - \bar{M}(G))^2}$$

Dove n è il numero totale di misure, $M_i(G)$ è la misura i -esima, n_j è il numero di misure che cade all'interno dell'intervallo j -esimo dell'istogramma e $M_j(G)$ è il valor medio della misura all'interno dell'intervallo j -esimo dell'istogramma.

Errori casuali

Nel caso di non riproducibilità delle misure $V(G)$ può essere conosciuto solo con una certa indeterminazione chiamato **errore casuale**. Distinguiamo quindi tra:

- **Errori massimi:** se ripetendo la stessa misura si ottiene sempre lo stesso (o 2) risultato allora $\Delta V(G)$ è molto maggiore della fluttuazione intrinseca di G e delle fluttuazioni prodotte dall'apparato di misura. Non si ha quindi nessuna informazione per valutare il valore medio o la deviazione standard. In questo caso $\Delta V(G)$ assume il significato di valore massimo ed il risultato dell'operazione di misura viene indicato con la stessa notazione usata per gli errori di sensibilità.
- **Errori casuali:** nel caso (opposto) in cui $\Delta V(G) \ll \sigma_G$ si ottengono valori diversi ad ogni misura il cui istogramma approssima tanto meglio la distribuzione che esso rappresenta sperimentalmente tanto maggiore è il numero di misure effettuate e tanto minore è $\Delta V(G)$ rispetto a σ_G . In questo caso σ_G è detto errore statistico.



5.11 ± 0.86

4.73 ± 0.88

4.81 ± 0.67

4.71 ± 0.79

4.70 ± 0.80

Propagazione degli errori

Non è la stessa per errori casuali ed errori massimi.

Immaginiamo che una certa grandezza Z sia funzione generica delle n grandezze G_i :

$$Z = f(G_1, G_2, \dots, G_n)$$

Si può ottenere una misura indiretta (o derivata) di Z inserendo le misure delle $M(G)$ nella corrispondente relazione:

$$M(Z) = f(M(G_1), M(G_2), \dots, M(G_n))$$

E gli errori sulle misure dei diversi G si ripercuotono sull'incertezza su Z .

Sono possibili 3 casi (anche se al momento ci limitiamo al primo caso):

- Le incertezze sulle G_i sono indipendenti, ovvero l'errore su (ad esempio) G_1 non è influenzato dagli errori sugli altri G_i .
- Gli errori non sono indipendenti, ovvero su (ad esempio) G_1 è in relazione con gli errori sugli altri G_i
- Gli errori sono 'correlati', ovvero c'è sia una componente dipendente ed una indipendente.

Propagazione degli errori massimi

È noto che il differenziale totale di una funzione $f = f(x_i)$ è dato da:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

Che rappresenta l'infinitesima variazione di f per infinitesime variazioni degli x_i . Una relazione analoga, anche se non esatta, vale per variazioni finite degli x_i , ma sufficientemente piccole

$$\Delta f \cong \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$$

Sostituendo $M(G_i)$ a x_i ed attribuendo a $\Delta M(G_i)$ il significato di errori massimi, si può ottenere l'errore massimo propagato sulla misura di Z , pur di assumere per i coefficienti di $\Delta M(G_i)$ solo valori positivi, in modo da combinare gli effetti nel più pessimistico dei modi:

$$\Delta M(Z) \cong \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial G_i} \right|_{G_i=M(G_i)} \cdot \Delta M(G_i)$$

Va tutto bene ? (vedremo a breve qualche paradosso)

Propagazione degli errori statistici

Qualora le $M(G_i)$ siano affette da errori statistici, la deviazione standard σ_Z si può ricavare con buona approssimazione dalle deviazioni standard σ_{G_i} mediante l'espressione:

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_i \left(\left. \frac{\partial f}{\partial G_i} \right|_{G_i=M(G_i)} \right)^2 \cdot \sigma_{G_i}^2$$

Troveremo più avanti giustificazione all'uso di questa espressione.

E nel caso in cui le diverse misure siano in parte affette da errori massimi ed in parte da errori statistici? **Di nuovo... daremo una risposta più avanti a questo interrogativo.**

Errori relativi

Per valutare l'entità dell'errore (in molti casi) è utile confrontarlo con la misura stessa, nel caso di errori massimi l'errore relativo è dato da, ed è adimensionale:

$$C = \frac{\Delta V(G)}{M(G)}$$

Si può anche introdurre l'errore percentuale:

$$E_{\%} = 100 \cdot E_r = 100 \frac{\Delta V(G)}{M(G)}$$

L'uso di errori relativi permette di confrontare l'impatto dell'errore sulla misura di diverse grandezze dirette su misure di grandezze derivate.

Esempi:

Misura della circonferenza di un cilindro $C = \pi D$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial D} \right| \Delta D = \pi \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔC direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di C e quello minimo:

$$\Delta C = \frac{1}{2} [\pi(D + \Delta D) - \pi(D - \Delta D)] = \pi \Delta D$$

Avrei ottenuto esattamente la stessa cosa.

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\pi \Delta D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D}$$

Esempi:

Misura della sezione di un cilindro $S = \pi D^2 / 4$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial D} \right| \Delta D = \pi D \Delta D / 2$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di S e quello minimo:

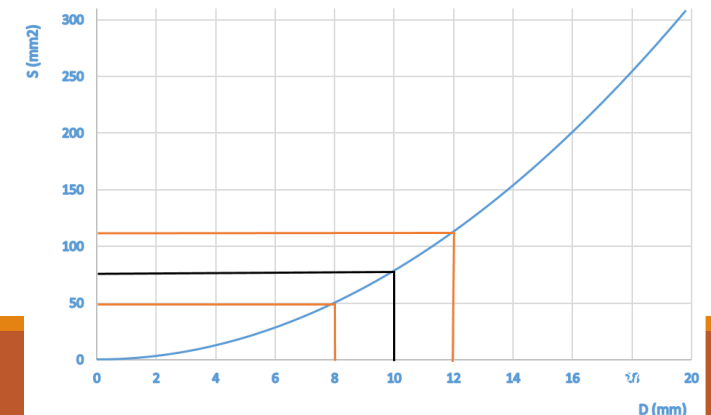
$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} [(D + \Delta D)^2 - (D - \Delta D)^2] = \frac{\pi}{8} [4D\Delta D] = \pi D \Delta D / 2$$

Avrei ottenuto esattamente lo stesso valore; ma qual'è il valore delle due semidifferenze?.

$$\Delta S_u = \frac{\pi}{4} [(D + \Delta D)^2 - D^2] = \frac{\pi D \Delta D}{2} + \frac{\pi (\Delta D)^2}{4} \quad \Delta S_d = \frac{\pi}{4} [D^2 - (D - \Delta D)^2] = \frac{\pi D \Delta D}{2} - \frac{\pi (\Delta D)^2}{4}$$

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\pi D \Delta D / 2}{\pi D^2 / 4} = 2 \frac{\Delta D}{D}$$



Esempi:

Misura della superficie di una sfera $S = 4\pi D^2$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial D} \right| \Delta D = 8\pi D \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di S e quello minimo:

$$\Delta S = \frac{1}{2} 4\pi [(D + \Delta D)^2 - (D - \Delta D)^2] = 2\pi [4D\Delta D] = 8\pi D \Delta D$$

Avrei ottenuto esattamente lo stesso valore.

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{8\pi D \Delta D}{4\pi D^2} = 2 \frac{\Delta D}{D}$$

Esempi:

Misura del volume di una sfera $V = \pi D^3/6$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

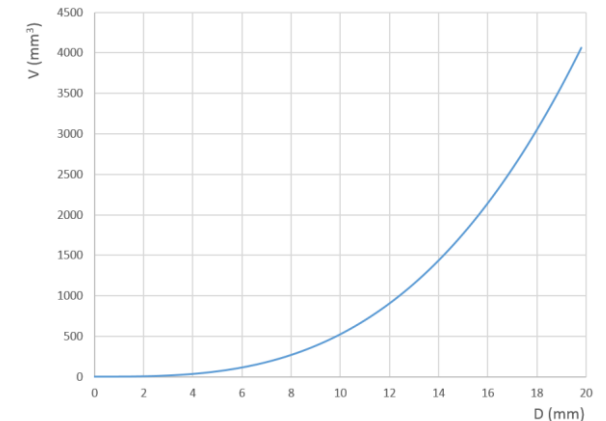
$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| \Delta D = \pi D^2 \Delta D / 2$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di C e quello minimo:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} [(D + \Delta D)^3 - (D - \Delta D)^3] = \frac{\pi}{12} [6D^2 \Delta D + 2\Delta D^3] = \frac{\pi(3D^2 \Delta D + \Delta D^3)}{6} \approx \pi D^2 \Delta D / 2$$

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi D^2 \Delta D / 2}{\pi D^3 / 6} = 3 \frac{\Delta D}{D}$$



E per valori misurati \approx risoluzione?

Pensiamo di dover misurare la differenza tra due spessori (una lastra da 2 mm ed una da 1 mm): $d = h_1 - h_2$ misurati con un metro lineare ($\Delta h = 0.5$ mm). L'errore su d è dato da:

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial h_1} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{\partial d}{\partial h_2} \right| \Delta h_2 = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 2\Delta h$$

Con un risultato per d che è:

$$1.0 \pm 1.0 \text{ mm}$$

Dovremmo quindi dire «le misure sono uguali entro gli errori!»

Per inciso per la somma $d = h_1 + h_2$

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial h_1} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{\partial d}{\partial h_2} \right| \Delta h_2 = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 2\Delta h$$

Stesso errore!

Esempio propagazione errori massimi

Nel caso in cui la grandezza che vogliamo misurare è un prodotto di varie grandezze generiche indipendenti eventualmente elevate a diverse valori di potenze:

$$w = x^{\alpha} y^{\beta} z^{-\gamma}$$

L'errore massimo su w ottenuto mediante la legge di propagazione degli errori massimi è:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \Delta z \\ &= \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{-\gamma} \Delta x + \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{-\gamma} \Delta y + \gamma x^{\alpha} y^{\beta} z^{-\gamma-1} \Delta z\end{aligned}$$

Interessante è per questi prodotti l'errore relativo:

$$\frac{\Delta w}{w} = \alpha \frac{\Delta x}{x} + \beta \frac{\Delta y}{y} + \gamma \frac{\Delta z}{z}$$

Somma dei diversi errori relativi pesata per la potenza!

Propagazione degli errori relativi di prodotti

Più in generale, dato:

$$y = \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

L'errore relativo su y è semplicemente dato da:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{|x_i|}$$

Uno dei vantaggi di questa scrittura, oltre alla facilità di calcolo, è quello di poter valutare in modo immediato l'errore di misura dominante e quali sono viceversa i termini che possono essere trascurati. L'errore massimo su y può essere ottenuto da:

$$\Delta y = y \cdot \left(\sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{|x_i|} \right)$$

PS: per le somme questa 'fattorizzazione' non avviene:

$$y = \sum_i x_i^{\alpha_i} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \sum_i \frac{|\alpha_i x_i^{\alpha_i - 1}|}{|\sum_j x_j^{\alpha_j}|} \cdot \Delta x_i$$

Cifre significative

Si chiamano cifre significative le cifre lette della misura di una grandezza fisica. Dipendono dalla sensibilità dello strumento.

- Tutti i valori non nulli rappresentano cifre significative.
- Gli zeri compresi tra digit non nulli sono cifre significative.
 - esempio: gli zeri in verde (tutti) sono significativi 4506002
- Gli zeri che precedono la prima cifra significativa (digit non nullo) non sono cifre significative.
 - esempio: in 0.0012, gli zeri (in rosso) non sono cifre significative (il numero in questione ha due sole cifre significative)
- Gli zeri finali sono significativi solo se presente la virgola (o punto decimale in inglese).
 - esempio: in 13900 gli zeri in rosso non sono significativi, ma in 13900.0 tutti gli zeri (in verde) sono significativi
 - Nel primo caso è utile l'uso della notazione scientifica 1.39×10^4

Cifre significative in operazioni

Per addizioni e sottrazioni Il numero risultante ha lo stesso numero di cifre decimali del numero a minor numero di cifre decimali.

$$20.12 + 102.423 = 122.54$$

Per moltiplicazioni e divisioni il numero risultante (prodotto) ha lo stesso numero di cifre significative del fattore con il minor numero di cifre significative.

$$10.0 \times 3.1415926 = 31.4$$

- Nei calcoli manteniamo una o due cifre significative in più rispetto al risultato finale.
- Nelle misure indirette il numero di cifre significative è definito dall'errore associato alla misura

Cifre significative

Regole per l'arrotondamento

Per semplicità, nei calcoli intermedi mantenere tutti le cifre e arrotondare i valori finali al numero richiesto (corretto) di cifre significative.

L'arrotondamento va effettuato, di norma, prendendo in considerazione solamente la prima cifra oltre l'ultima significativa (chiamiamola "extra").

- se tale cifra è minore o uguale a 4, il valore dell'ultima cifra significativa rimane inalterato.
- se è maggiore di 5, il valore dell'ultima cifra significativa deve essere incrementato di una unità.
- se è 5 seguito da un numero maggiore di zero si opera come il caso precedente. Se il cinque è seguito da un certo numero di zeri, caso estremamente particolare, il valore precedente viene arrotondato al numero pari più vicino.
- se è 5 seguito solo da un certo numero di zeri senza altre cifre, caso estremamente particolare, il valore precedente viene arrotondato al numero pari più vicino.

Incertezze di misura e cifre significative

Si definiscono cifre significative del risultato di una misura le cifre certe e la prima cifra incerta.

E' tollerato, per avere una precisione maggiore sull'errore avere 2 cifre significative sull'errore (e di conseguenza aumentare di un'unità le cifre significative della misura).

Esempi:

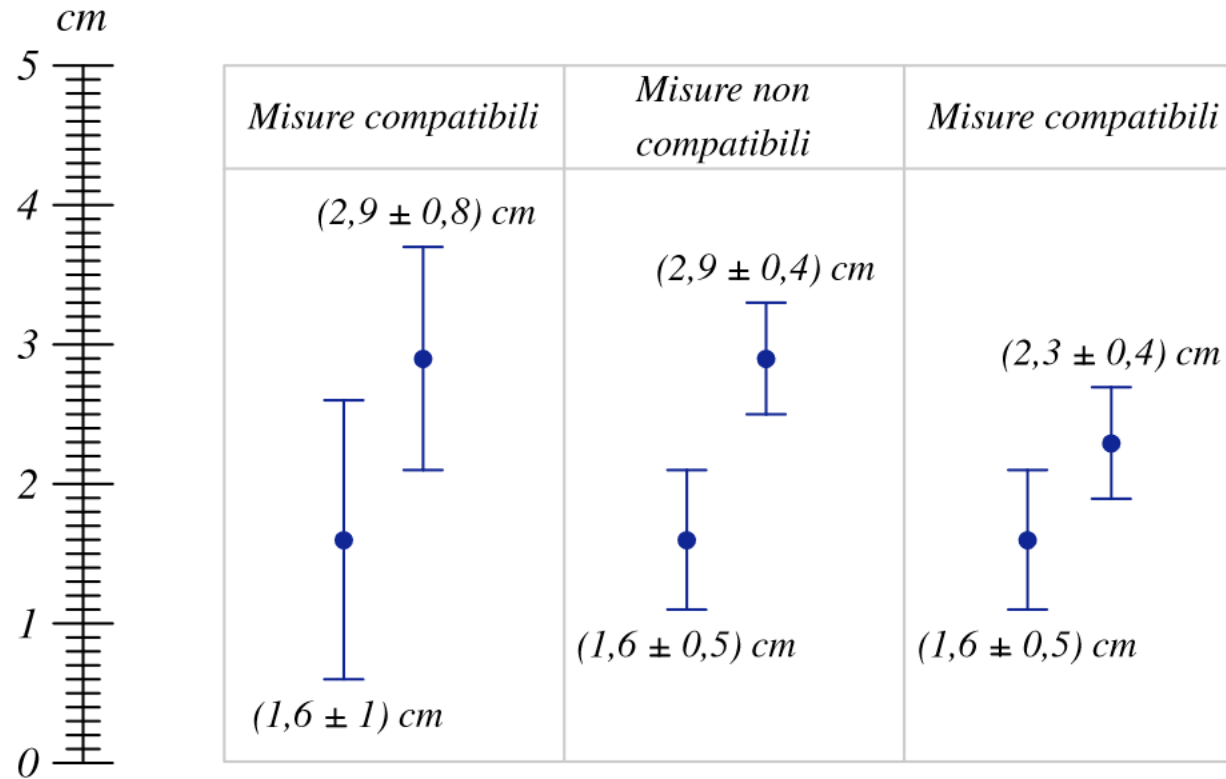
Misura	Risultato	Notazione scientifica	Risultato II
112859 ± 6240	113000 ± 6000	$(1.13 \pm 0.6) \times 10^5$	$(1.129 \pm 0.62) \times 10^5$
731 ± 23	730 ± 20	$(7.3 \pm 0.2) \times 10^2$	$(7.31 \pm 0.23) \times 10^2$
1096 ± 364	1100 ± 400	$(1.1 \pm 0.4) \times 10^3$	$(1.10 \pm 0.36) \times 10^3$
7.853 ± 0.482	7.9 ± 0.5		7.85 ± 0.48
2.9555 ± 0.06268	2.96 ± 0.06		2.956 ± 0.062
3.05 ± 0.034	3.05 ± 0.03		
3.0537 ± 0.0034	3.054 ± 0.003		3.0537 ± 0.0034

Compatibilità

Un altro concetto importante riguarda la compatibilità di due misure

- Due misure si dicono compatibili se esiste un valore che rientra in entrambi gli intervalli delle misure. Ad esempio
 - le due misure $10\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 2.5\text{ cm}$ sono compatibili, perché le misure tra 8 cm e 9.5 cm soddisfano entrambi gli intervalli
 - Le due misure $10\text{ cm} \pm 1\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 1.5\text{ cm}$ non sono compatibili, perché la prima indica che la misura vera al minimo vale 9 cm , mentre la seconda dice che al massimo vale 8.5 cm
- La differenza tra le migliori stime delle due misure si dice discrepanza. Ad esempio
 - Tra $10\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 2.5\text{ cm}$ la discrepanza è di 3 cm
- In una misura, trovare due misure non compatibili rappresenta un problema: sicuramente c'è stato un errore nel processo di misurazione
 - In alcuni casi, potrebbe essere stata semplicemente sottostimata l'incertezza
- In questi casi potrebbe essere necessario scartare le vecchie misure, individuare l'errore e ripetere le misurazioni dall'inizio

Esempio



Precisione e compatibilità

- In un esperimento quindi è necessario innanzitutto eseguire misurazioni in modo che il margine di errore sia minimo, ma occorre valutare attentamente quale sia l'errore massimo che possiamo ottenere
- In caso contrario, da un lato si rischia di ottenere misure poco significative (con margini di errore troppo grandi), dall'altro si potrebbero ottenere misure incompatibili che invalidano l'esperimento

ESPERIENZE CON STRUMENTI DI MISURA

Calibro ventesimale

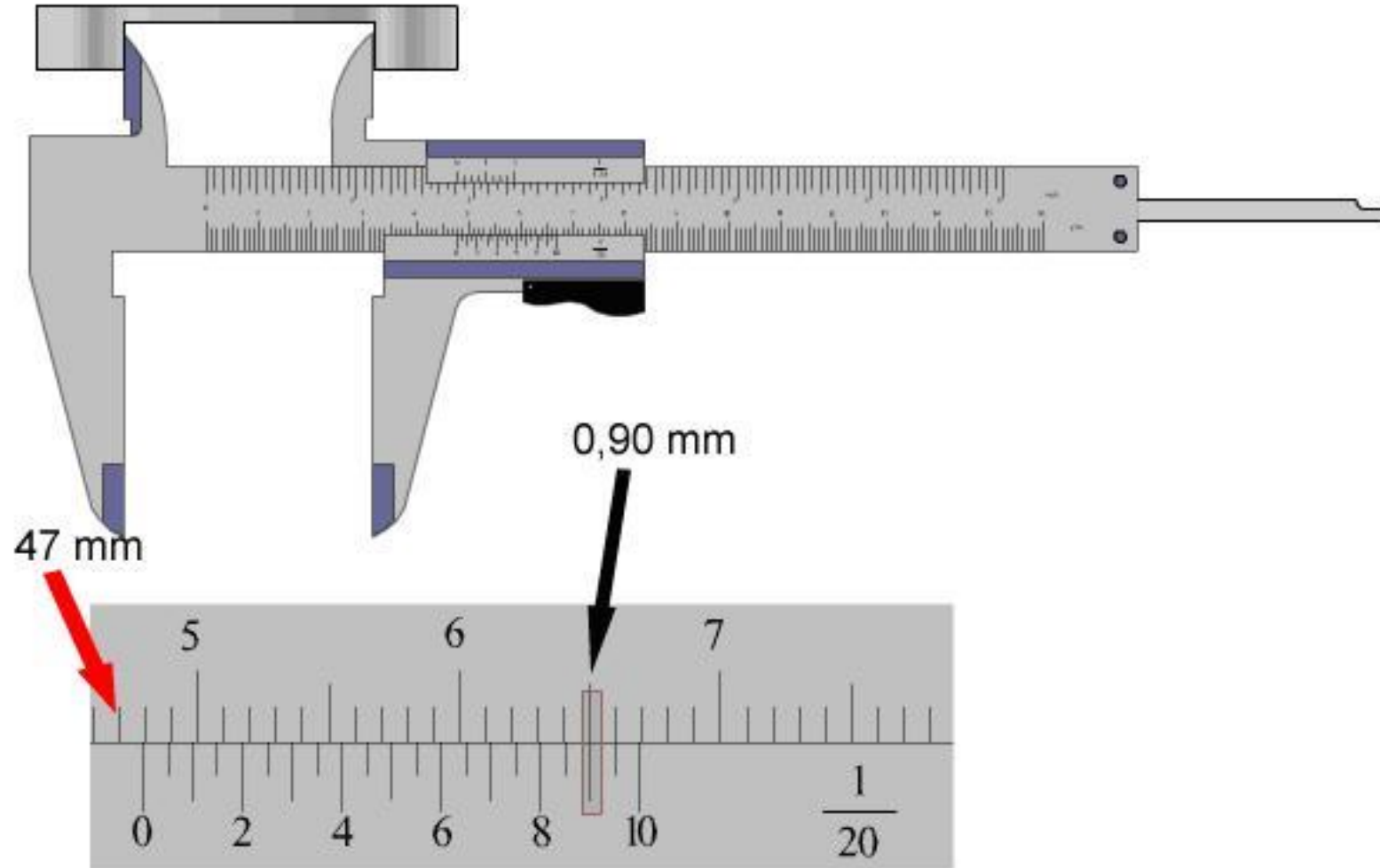
Il calibro è uno strumento realizzato in acciaio inossidabile ben lavorato meccanicamente e costituito da un **regolo** (fisso) sul quale può scorrere un cursore detto **nonio**.



Nel calibri del laboratorio 20 divisioni della scala del nonio d , corrispondono a 39 divisioni della scala principale D in millimetri. Ovvero 1 divisione del nonio misura $39/20$ mm, pari a 1.95 mm.

Se il nonio viene spostato in avanti di una distanza pari a $\delta = 2D - d = 0.05$ mm, allora la sua prima tacca del nonio coinciderà ($0.05 + 1.95 = 2.00$ mm) con la seconda tacca della scala principale; se il nonio si sposta di una quantità pari a $2\delta = 0.10$ mm allora la seconda tacca del nonio coinciderà con la quarta tacca della scala principale e così via, riavanzando la scala di lettura del nonio ad ogni millimetro della scala principale.

Calibro ventesimale, esempio di lettura



Calibro digitale

In questo tipo di calibro, sul corsoio viene montato un indicatore elettronico digitale che ne rileva lo spostamento, mentre sul corpo viene normalmente incisa una scala millimetrata, usata però solo per la verifica grossolana dello strumento elettronico.

I display sono normalmente realizzati con una **risoluzione 0,01 mm**.

Sono dotati indicatori miniaturizzati e dal consumo molto basso.

Gli indicatori possono disporre di numerose funzioni:

- visualizzazione sia di letture metriche, che inglesi;
- azzeramento della lettura in un punto arbitrario;
- settaggio arbitrario di una quota;
- collegamento seriale con un PC

I calibri vengono costruiti in modo che lo strumento dia la massima precisione alla temperatura standard di 20 °C. Misurazioni effettuate a temperature significativamente più alte, e con strumenti di grande risoluzione, devono tenere conto della dilatazione del materiale con cui è costruito il calibro stesso.



Calibro digitale

Il rilevamento di tipo capacitivo è solitamente impiegato per i commutatori di tipo tattile, dove il dito dell'utente svolge il ruolo della seconda armatura del condensatore.

Ma l'uso del rilevamento capacitivo non è limitato ai commutatori on/off e il calibro digitale ne è un classico esempio.

Circa 30 anni fa Ingvar Andermo, un ingegnere elettrico che lavorava presso l'istituto di ricerca IM di Stoccolma, stava lavorando a un'applicazione per la lettura di banconote.

Utilizzando la tecnologia capacitiva. C.E. Johansson contattò Andermo per lo sviluppo di un calibro digitale utilizzando la tecnologia magneto-resistiva, ma Andermo ritenne quell'approccio troppo complicato e decise di sfruttare la sua esperienza nel campo del rilevamento capacitivo. Il primo calibro prodotto da Johansson fece il suo debutto durante un'esposizione a Chicago nel 1980. Più tardi Johansson cedette in licenza la tecnologia alla giapponese Mitutoyo che alcuni anni dopo commercializzò il suo primo calibro digitale, venduto in tutto il mondo in milioni di unità

Micrometro Palmer o calibro centesimale

Stesso principio: scala principale, divisa in 0.5 mm solidale e scala secondaria, sulla parte rotante divisa in 50 parti. E' costituito da una vite micrometrica di estrema precisione con passo di 0.5 mm. La vite termina in un tamburo graduato suddiviso come detto in 50 parti. La risoluzione del calibro è quindi di $0.5/50 = 0.01$ mm

Sfrutta come amplificatore una vite: poiché' ad ogni giro la punta della vite avanza di una lunghezza pari al passo, suddividendo in più parti l'angolo giro e possibile frizione blocco ottenere, con passi piccoli e suddivisioni angolari numerose, elevatissime sensibilità



Micrometro Palmer

- Lettura dello strumento: attenzione alla scala principale: lo sbaglio più frequente è di contare un passo in più o in meno in corrispondenza dei valori sul tamburo prossimi allo zero.
- Prestate attenzione agli errori sistematici. Sforzando eccessivamente la vite a fine corsa si può provocare una deformazione della struttura dello strumento provocando uno spostamento sistematico dello zero: errore di zero.
- Un uso corretto richiede che si calcoli la media aritmetica di almeno una decina di misure effettuate a sollecitazione nulla. Il valore ottenuto va sottratto a tutti i valori letti.
- Qualora fosse necessario si potrebbe invece eseguire un azzeramento dello strumento. Questa operazione consiste nel modificare lo strumento ruotando la madre vite all'interno della struttura per spostarla fino ad annullare lo zero dello strumento.
- Per controllare la pressione esercitata sull'oggetto in misura dalla punta della vite micrometrica, la parte finale del tamburo è dotata di un meccanismo "a frizione". In prossimità del valore finale è anche necessaria una bassa velocità di rotazione del tamburo per evitare che l'energia cinetica acquisita dal tamburo consenta di superare la pressione che sarebbe stata regolata dalla frizione.

Micrometro Palmer

0.4270 ± 0.0020 mm



I esperienza in laboratorio

Misura della superficie e del volume di vari oggetti e calcolo del rispettivo errore di misura.

Bisogna verificare che:

- Le misure siano dominate dalla risoluzione degli strumenti
- Le tolleranze di realizzazione degli oggetti siano inferiori alla risoluzione degli strumenti usati
- La taratura degli strumenti sia corretta

Esperienza 1

Esperienza 1

Misura della densità di due corpi di forma regolare

Scopo

- uso dei calibri per la misura delle dimensioni
- misura indiretta dei volumi e delle densità
- confronto delle densità dei due oggetti scelti

Strumentazione a Disposizione

- metro a nastro, per una prima misura delle dimensioni del corpo
- calibro a cursore ventesimale, per una miglior determinazione delle dimensioni
- calibro Palmer, per una misura più precisa delle dimensioni
- bilancia elettronica, per la misura della massa

Volume dei corpi

1. Operazioni Preliminari

- determinare l'intervallo di funzionamento e gli errori di sensibilità degli strumenti a disposizione per le misure delle lunghezze
- verificare l'azzeramento del calibro a cursore e del calibro Palmer
- stabilire la formula appropriata per la determinazione del volume del corpo in funzione delle sue dimensioni lineari e ottenete l'espressione del corrispondente errore utilizzando le leggi di propagazione degli errori massimi assoluti e relativi

2. Dimensioni e Volume dei corpi

- misurare una volta le diverse dimensioni lineari che intervengono nella formula che esprime il volume del corpo utilizzando per ogni dimensione, successivamente, gli strumenti di misura nell'ordine dell'errore di sensibilità decrescente. Verificare la compatibilità dei valori ottenuti.
- con lo strumento di sensibilità maggiore ripetere almeno 5 volte l'operazione di misura "nello stesso punto" e altrettante in punti diversi; stabilire il valore da utilizzare (ed il corrispondente errore) per la misura dei volumi e motivate la scelta
- determinate il volume e stimate il corrispondente errore utilizzando le misure ottenute

Massa dei corpi

- determinate la massa dei corpi con la bilancia elettronica

Densità dei corpi

- scrivere la formula che lega la densità media di un corpo alla sua massa ed al suo volume, e il corrispondente errore utilizzando le leggi di propagazione degli errori massimi assoluti e relativi
- determinate la densità dei corpi ed i corrispondenti errori
- verificare se le densità misurate sono compatibili con quelle dei materiali più diffusi e se sono compatibili tra loro

nome
data esperienza

Risultati dell'Esperienza 1 Misura della densità di due corpi di forma regolare (O1 e O2)

Strumenti di misura

strumento	intervallo di funz.	errore di sensibilità	azzeramento
metro a nastro			
calibro vent.			
calibro Palmer			

O1

disegno schematico
con indicate le dimensioni misurate per determinarne il volume

formula per il volume e l'errore

dimensioni

	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl
metro a nastro			
calibro vent.			
calibro Palmer			

compatibili?

ulteriori misure nello stesso punto e in punti diversi

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

valori usati per determinare il volume

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

motivazione:

Volume di O1 ed errore:

Massa di O1:

Densità di O1

Formula usata per la densità e l'errore (assoluto e relativo):

Risultato:

O2

disegno schematico
con indicate le dimensioni misurate per determinarne il volume

formula per il volume e l'errore

dimensioni

	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl
metro a nastro			
calibro vent.			
calibro Palmer			

compatibili?

ulteriori misure nello stesso punto e in punti diversi

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

valori usati per determinare il volume

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

motivazione:

Volume:

Massa di O2:

Densità di O2

Formula usata per la densità e l'errore (assoluto e relativo):

Risultato:

Commenti

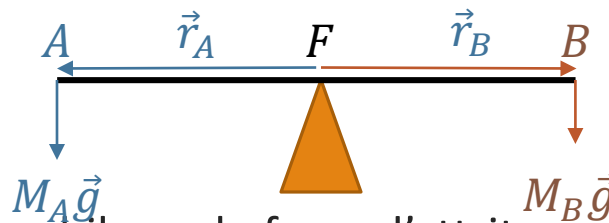
- valori di densità compatibili con l'ipotesi che si tratti dello stesso materiale?
- di che materiale(i) potrebbe trattarsi?

Bilancia analitica

Principio di funzionamento

Si tratta di uno strumento che consente il confronto diretto della massa incognita con un corpo con massa campione.

Nella forma 'idealizzata' può essere costruita sospendendo il corpo in misura all'estremità **A** di una barra rigida detta **giogo** libera di ruotare intorno ad un asse orizzontale **F** detto **fulcro**, ed all'altra estremità **B** la massa campione



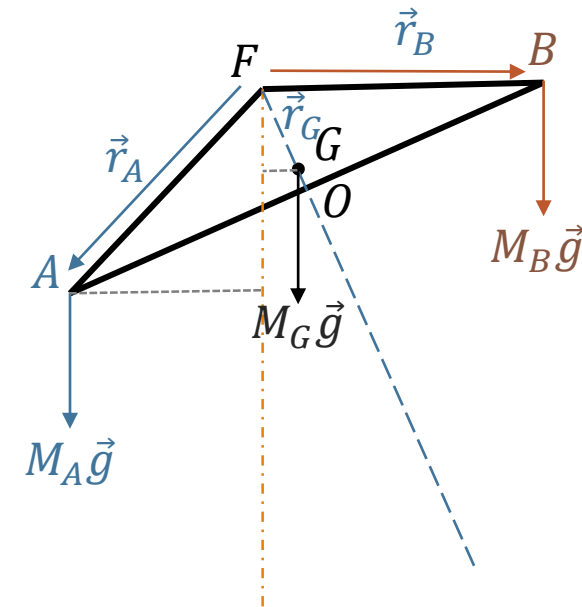
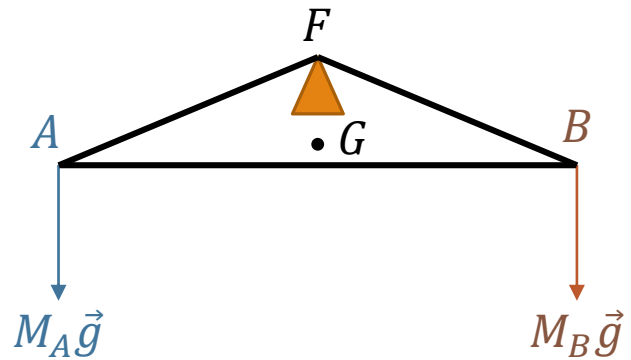
(Se la massa del giogo è trascurabile, se le forze d'attrito sono trascurabili) le forze agenti sono solo quella gravitazionale sulle masse ed il vincolo del fulcro. Posso trovare la condizione di equilibrio $M_e = 0$ scegliendo di calcolare i momenti rispetto ad F:

$$\vec{r}_A \times \vec{P}_A + \vec{r}_B \times \vec{P}_B = 0 = M_A g r_A - M_B g r_B \Rightarrow M_A = M_B \cdot \frac{r_B}{r_A}$$

Il valore di M_A è quindi ottenuto dal confronto con la massa campione note le due lunghezze dei bracci.

Bilancia di precisione

In realtà l'equilibrio è instabile e ciò rende inutilizzabile questo dispositivo, oltre all'idealizzazione di massa trascurabile dei bracci e rigidità del giogo. Per ovviare a ciò si usa come giogo un corpo sufficientemente massiccio (e quindi rigido) con una costruzione che pone il fulcro al di sopra del baricentro del sistema (equilibrio stabile)



La condizione di equilibrio è data da: $\vec{r}_A \times \vec{P}_A + \vec{r}_B \times \vec{P}_B + \vec{r}_G \times \vec{P}_G = 0$ che mi da per l'angolo α la relazione

$$\tan \alpha = \frac{M_A \overline{AO} - M_B \overline{BO}}{(M_A + M_B) \overline{FO} + M_G \overline{FG}}$$

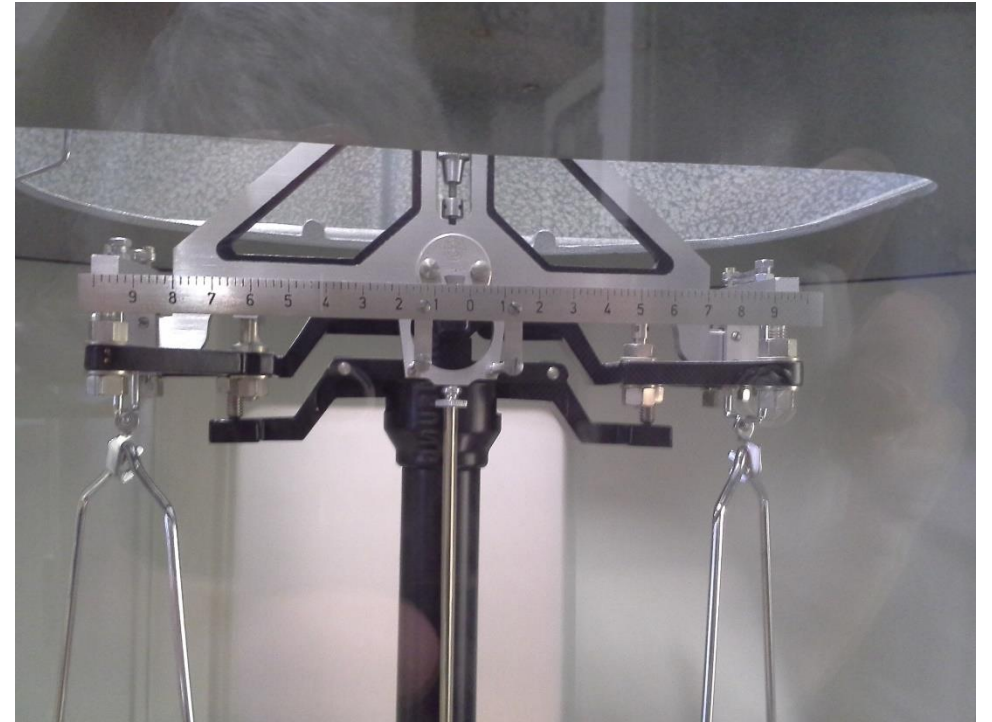
Bilancia di precisione

Un sistema come quello illustrato richiede, per la misura di M_A oltre alla conoscenza di M_B , anche la conoscenza di M_G , di α e dei diversi parametri costruttivi \overline{AO}, \dots . E' costituita da:

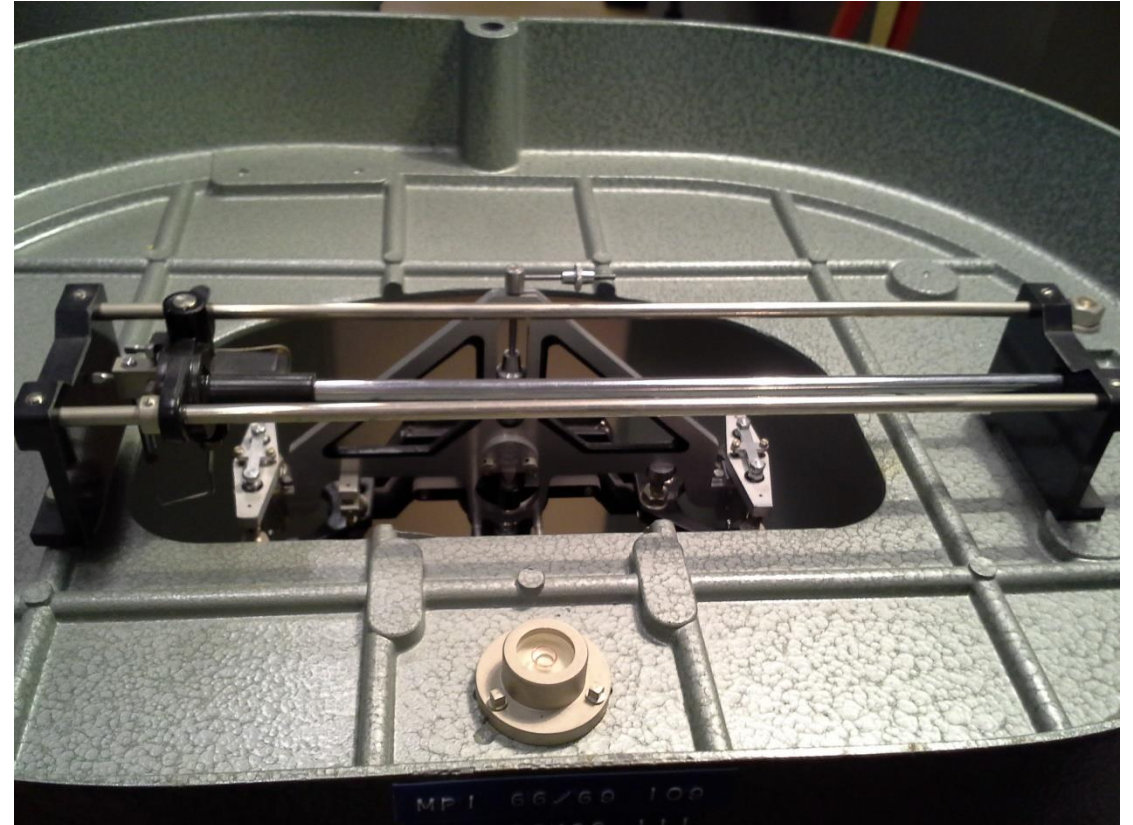
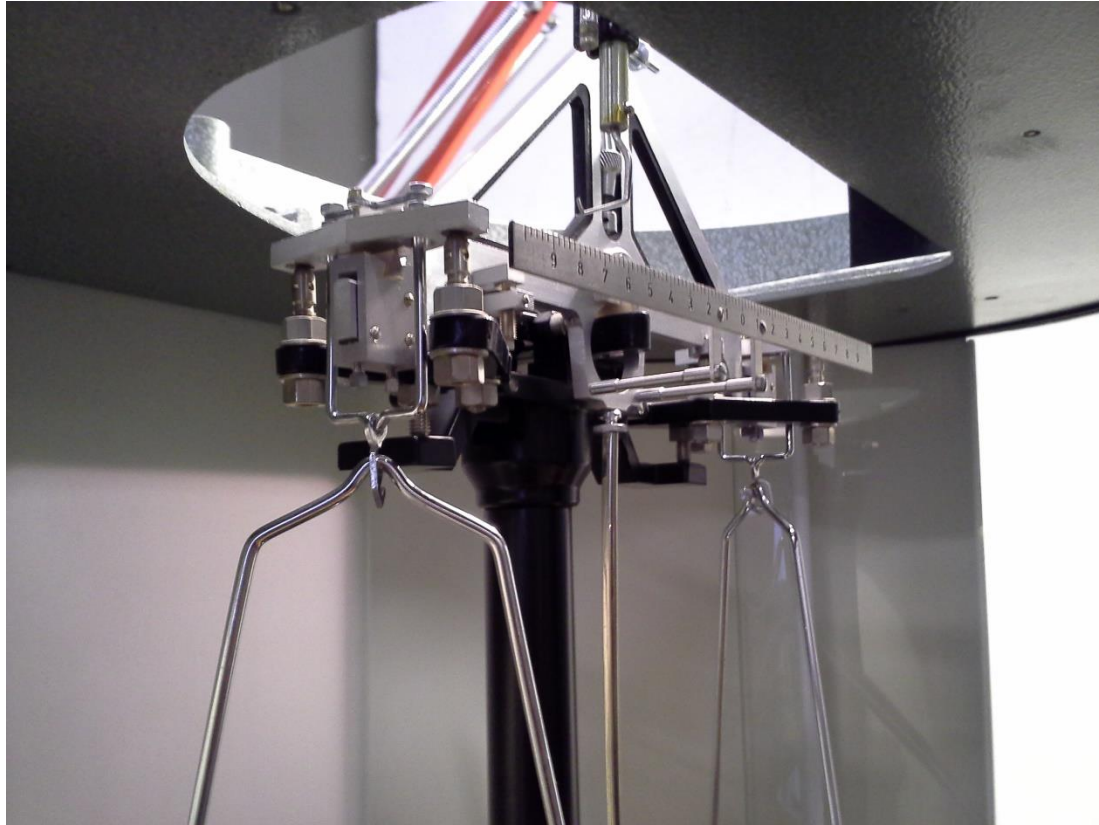
- Giogo (non deformabile)
- Piattelli (per le masse)
- Indice solidale con il giogo
- Indicatore
- 3 coltelli per A, B ed F
- Una massa campione detta '*cavaliere di Berzelius*' da 10mg Posizionabile sui bracci
- Un sistema di bloccaggio



Immagini



Immagini



Misura della sensibilità

Nell'ipotesi in cui i due bracci del giogo siano uguali ($\overline{AO} = \overline{BO}$), a piatti scarichi l'indice della bilancia si fermerà su una posizione di equilibrio α_0 della scala (non necessariamente $\alpha_0 = 0$). Per valutare la sensibilità

$$S = \frac{d\alpha}{dM}$$

Ponendo un piccolo sovraccarico in A o B, l'indice si sposterà di un certo numero di divisioni $\Delta\alpha$, noto che sia il sovraccarico ΔM , otteniamo quindi la misura della sensibilità

$$S = \frac{\Delta\alpha}{\Delta M}$$

Da notare che $\Delta\alpha$ dovrà essere maggiore di una singola divisione, altrimenti l'errore relativo sulla sensibilità sarà grande

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta(\Delta\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1/2}{1} = 0.5$$

Notiamo (dalla precedente) che per angoli piccoli è anche

$$\alpha = \frac{M\overline{AO}}{2M\overline{FO} + M_G\overline{FG}} \Rightarrow S = \frac{\overline{AO}}{2M\overline{FO} + M_G\overline{FG}}$$

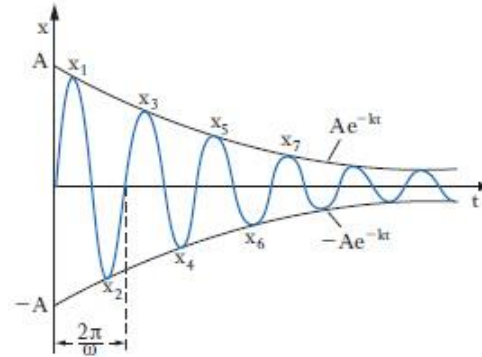
Misura di massa

Una operazione di misura consiste quindi in:

- Individuare la posizione di equilibrio a piatti scarichi α_0
- Bloccare i piatti
- Porre la massa incognita M_X sul piatto A e delle masse campione M_C sul piatto B, per tentativi fino a trovare una posizione di equilibrio α all'interno della scala.
- La quantità $\Delta M = (\alpha - \alpha_0)/S$ positiva o negativa mi da la quantità di massa da sommare/sottrarre a M_C per determinare il valore di M_X

Lettura in oscillazione

Poiché la misura di massa consiste nel confronto con una massa campione e nell'individuazione di due masse di equilibrio, la precisione dipende dal modo in cui si determinano i p. ti di equilibrio (le masse campione sono determinate e possono essere affette solo da errori sistematici).



- Una volta liberato il blocco la bilancia presenta (per costruzione) un moto oscillatorio, che visti gli attriti comunque presenti, è di tipo smorzato.
- Aspettare l'arresto comporta (oltre al tempo di attesa) introdurre effetti casuali non trascurabili.
- Per ridurre tale effetto, si deve leggere la posizione dell'indice in corrispondenza a 5 elongazioni massime consecutive.
- siano letti 5 massimi x_1, x_3, x_5 a destra (assunte positive) e x_2, x_4 a sinistra (assunte negative); la posizione di equilibrio è

$$x_{eq} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_5) + \frac{1}{2} (x_2 + x_4) \right] \quad \text{con } \Delta x_{eq} = 1 \text{ div}$$

Principali errori sistematici

I principali errori sistematici nella bilancia di precisione sono:

- Differenza nella lunghezza dei bracci

- Se si impone che l'effetto del primo di questi errori sia inferiore all'effetto sull'indeterminazione della misura prodotto dal corrispondente errore casuale, per una bilancia con portata 100g e con $\Delta M = 1$ mg la differenza di lunghezza dei bracci, Δb , deve essere tale che

$$\frac{\Delta b}{b} < \frac{\Delta M}{M} = 10^{-5}$$

Quindi se $b = 10$ cm deve essere $\Delta b < 10^{-4}$ cm. Per quanto si cerchi, all'atto della costruzione, di rendere questa differenza più piccola possibile, non si può mai essere sicuri che l'appoggio dei tre coltelli garantisca questa condizione entro il limite citato.

- Spinta di Archimede

- Su ogni corpo di massa M immerso in un fluido agisce oltre la forza peso Mg una forza diretta in verso opposto e pari al peso della porzione di fluido occupata dal corpo.
- Siano: M la massa del corpo; μ la sua densità (gr/cm^3); $V = m/\mu$ il suo volume μ_a le densità dell'aria; μ_c la densità delle masse campioni M_c di volume $V_c = \frac{M_c}{\mu_c}$. La spinta di Archimede vale $\mu_a V_a g$ per il corpo e $\mu_a V_c g$ per la massa campione con una differenza di massa pari a $(\mu - \mu_a)V_a$. Ovvero:

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x}\right) = M_c \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c}\right) \Rightarrow M_x = M_c \frac{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c}\right)}{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x}\right)}$$

Spinta di Archimede. Esempio

Siano

- $\mu_c = 8.4 \text{ g/cm}^3$ (ottone)
- $\mu_a = 1.205 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$

Se la densità dell'oggetto in misura è pari a quella dell'acqua ($\mu_x = 1.0 \text{ g/cm}^3$) la correzione risulta essere pari a

$$M_x = M_c \frac{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c}\right)}{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x}\right)} = M_c \frac{\left(1 - \frac{1.205 \times 10^{-3}}{8.4}\right)}{\left(1 - \frac{1.205 \times 10^{-3}}{1}\right)} = M_c \frac{1 - 0.0001}{1 - 0.001} \sim M_c (1 + 0.001)$$

La correzione dell'effetto sistematico è dell'ordine dello 0.1%, per difetto se $\mu_x < \mu_c$ e in eccesso se $\mu_x > \mu_c$. Per una massa di 50g, ed una sensibilità di 1mg – ovvero $M_x = (50.000 \pm 0.001) \text{ g}$ – l'effetto sistematico dovuto alla densità è di 0.05 g, 50 volte l'errore di sensibilità.

Nel caso di sughero ($\mu_x = 0.25 \text{ g/cm}^3$) la correzione è maggiore di un fattore 4.

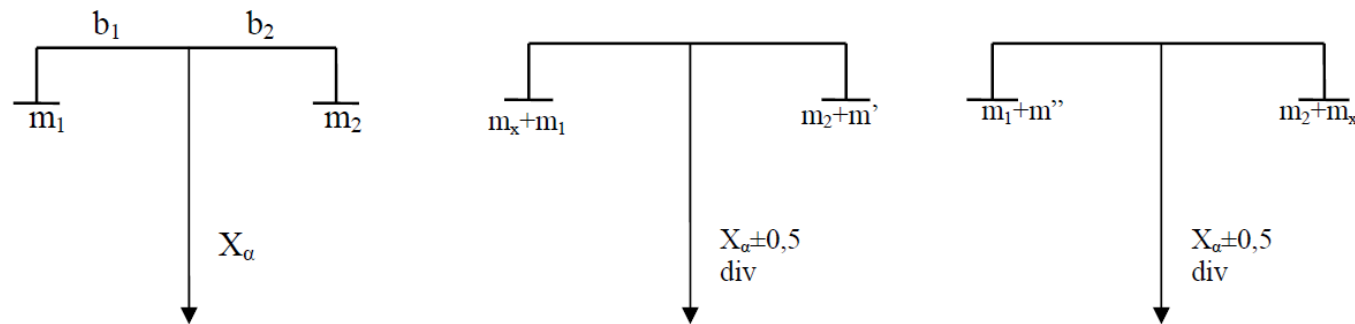
Metodo della tara

Uno dei procedimenti di misura che si può adottare per ovviare all'errore sistematico dovuto alla diversa lunghezza dei bracci del giogo è quello del metodo della tara o pesata doppia:

- Si mette su uno dei piatti (A) una massa detta tara (maggiore della massa da pesare $M_x \leq M_T$) e nel secondo piatto (B) la massa da pesare M_x .
- Aggiungendo opportuni pesi campione M_{c1} si raggiunge l'equilibrio ad una certa posizione α
- Si ripete la pesata sostituendo nel piatto (B) a $M_x + M_{c1}$ una seconda massa campione M_{c2} che riporti la bilancia nella stessa posizione di equilibrio.

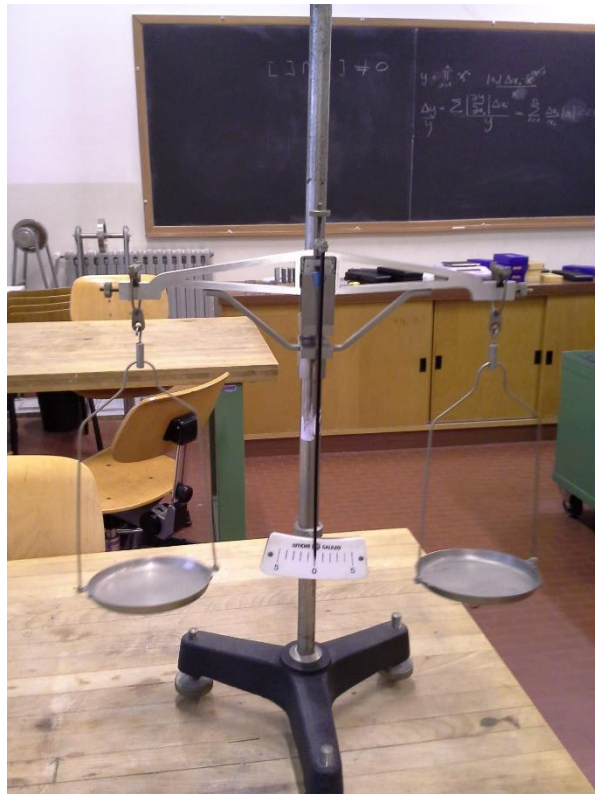
È allora evidente che:

$$M_x = M_{c2} - M_{c1} \quad \text{e} \quad \Delta M_x = 2\Delta M$$



Misure di densità – bilancia idrostatica

Con bilance di precisione particolari (ma meno precise) posso anche effettuare delle misure di densità di oggetti, sfruttando nuovamente la spinta di Archimede.



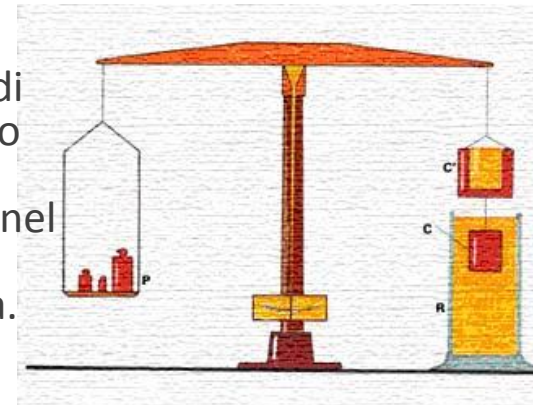
Bilancia idrostatica

Si tratta di una usuale bilancia a giogo alla quale sono state apportate due modifiche:

- al di sotto dei piatti è fissato un gancio per poter sospendere gli accessori;
- il giogo è sollevabile mediante un sistema a vite in modo da operare al di sotto dei piatti.

Le esperienze principali condotte con la bilancia idrostatica riguardano la dimostrazione sperimentale della legge di Archimede e la determinazione della densità per lo più dei solidi.

- [Nel primo caso](#), a uno dei piatti si sospende un cilindro cavo di ottone e alla base inferiore di questo un cilindro di ottone pieno, di volume uguale alla capacità del primo. Sull'altro piatto della bilancia si dispongono delle masse fino a ristabilire l'equilibrio. Quando si immerge il cilindro pieno in acqua la bilancia ovviamente non è più in equilibrio. Si versa quindi acqua nel cilindro cavo fino a che quello pieno risulti totalmente immerso e si ha di nuovo equilibrio quando la spinta di Archimede è pari al peso di un volume d'acqua uguale a quella spostata.
- [Nel secondo caso](#), mediante un filo di massa trascurabile (?) si sospende il solido di cui si vuole determinare la densità al di sotto di un piatto della bilancia e se ne misura la massa. Si immerge poi il solido in acqua e si ristabilisce l'equilibrio con una massa aggiuntiva. Il rapporto tra la massa del campione a secco e quella addizionale, moltiplicato per la densità del liquido fornisce la densità del solido.



Misura della densità relativa

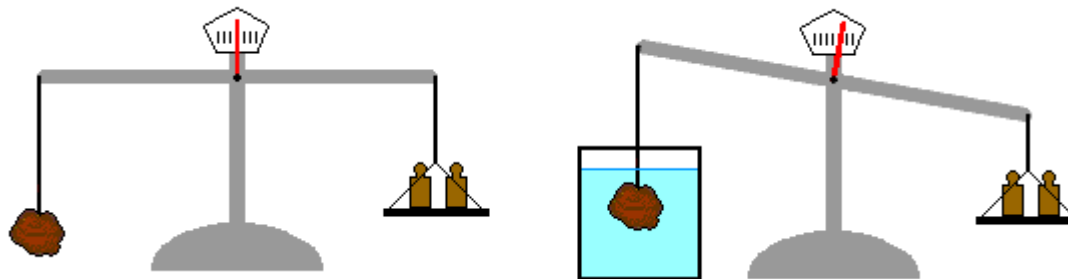
Eseguiamo due misure, la prima con il corpo sul piatto A immerso in aria, la seconda con il corpo sul piatto A immerso in acqua. Raggiungeremo la stessa posizione di equilibrio, aggiungendo sul piatto B una massa nei due casi aggiungendo in entrambe i casi di M_{c1} e M_{c2} .

Scriviamo nei due casi:

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x} \right) = M_{c1} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right)$$

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} \right) = M_{c2} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right)$$

Dividendo ottengo \hookrightarrow



Misura della densità relativa

Dividendo ottengo \Leftrightarrow

$$\frac{\left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x}\right)}{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x}\right)} = \frac{M_{c2}}{M_{c1}}$$

ovvero

$$1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} = \frac{M_{c2}}{M_{c1}} - \frac{M_{c2} \mu_a}{M_{c1} \mu_x}$$

Svolgendo rispetto a μ_x

$$\frac{1}{\mu_x} \left(\frac{M_{c2} \mu_a}{M_{c1}} - \mu_b \right) = \frac{M_{c2}}{M_{c1}} - 1$$

Ovvero

$$\mu_x = \frac{\frac{M_{c2} \mu_a - M_{c1} \mu_b}{M_{c1}}}{\frac{M_{c2} - M_{c1}}{M_{c1}}} = \frac{M_{c1} \mu_b - M_{c2} \mu_a}{M_{c1} - M_{c2}} \cong \mu_b \frac{M_{c1}}{M_{c1} - M_{c2}}$$

Ovviamente se l'oggetto ha una densità maggiore a quella dell'acqua...

Errore?

Probabilità e statistica

Introduzione

Se noi non fossimo ignoranti non ci sarebbe probabilità , ci potrebbero essere solo certezze. Ma la nostra ignoranza non può essere assoluta, altrimenti non ci sarebbe più probabilità . Così i problemi di probabilità possono essere classificati a seconda della maggiore o minore profondità della nostra ignoranza.

(H. Poincaré)

Meccanica classica: note le proprietà di un corpo (massa, forma, etc.), le condizioni iniziali di moto (posizione, velocità etc.) e le condizioni esterne (campi di forze, condizioni al contorno, etc.) è possibile determinarne in modo esatto il suo comportamento negli istanti successivi.

Ma è sufficiente analizzare il semplice esperimento del lancio di una moneta o di un dado per capire che non è facile prevedere il risultato, ossia l'occorrenza testa/croce o di uno dei 6 numeri nella faccia superiore. In modo simile non è possibile trattare sistemi complessi (come un gas in un cilindro) a partire dai moti delle singole molecole.

Semplicemente con un numero di parametri troppo elevati, modifichiamo il `metodo scientifico', ovvero rinunciamo a predire l'esatto esito dell'esperimento e ci limitiamo ad esprimere affermazioni sulla plausibilità di ciascuno dei risultati possibili. In altri termini, sebbene si seguiti ad assumere che le leggi "di base" siano di tipo deterministico, il nostro *stato di incertezza* riguardo i dettagli del moto ci impedisce di arrivare a conclusioni *certe*.

Introduzione II

Ci sono poi fenomeni in cui è la stessa meccanica classica a non essere adeguata alla descrizione del processo elementare. Questo succede sulle scale atomiche e inferiori. In questo caso sono le stesse leggi fondamentali che assumono natura aleatoria; si perde il carattere deterministico “almeno in linea di principio” della meccanica classica e si deve utilizzare il linguaggio della *meccanica quantistica*.

È da notare comunque che, sebbene le due situazioni siano sostanzialmente differenti dal punto di vista fisico, esse sono simili dal punto di vista *conoscitivo*: in entrambe siamo in stato di incertezza rispetto ai possibili esiti, anche se nel caso quantistico c'è la convinzione che, pur partendo da un ben preciso stato di preparazione del sistema iniziale, l'evoluzione sia intrinsecamente probabilistica. Le diversità delle problematiche si riflette sia sul modo di intendere le leggi fisiche che sui metodi usati per valutare la probabilità dei possibili esiti.

Perché studiare la probabilità

L'inizio della teoria delle probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avviene nel XVII secolo, come risposta a due classi di problemi, legate rispettivamente ai giochi d'azzardo e alle assicurazioni. Nel primo caso si trattava di valutare la probabilità di vincere scommettendo sul verificarsi di un certo evento, ad esempio la faccia con su inciso il numero 6 nel lancio di un dado. Grandi matematici e statistici come Fermat (1601-1665) Laplace (1749-1827) e Bernoulli (1654-1705) discutono spesso nelle memorie di esperimenti eseguiti con dadi, ed uno dei loro obiettivi era proprio quello di fornire strategie vincenti.

Nel secondo caso si rendeva necessaria per le banche la stima della probabilità di morte di un individuo di una certa età, ovvero la probabilità che egli potesse sopravvivere un determinato numero di anni dalla stipula del contratto.

Questi due diversi contesti hanno dato luogo a due diversi metodi per valutare la probabilità, o, come si usa ancora dire, a due "definizioni" di probabilità viste talvolta in contrapposizione fra di loro: la "matematica" e la "sperimentale" (o "empirica"); la "classica" e la "frequentista"; quella "a priori" e quella "a posteriori". Il termine definizione è racchiuso fra virgolette, ad indicare che, nell'approccio che andremo a seguire, si tratta in realtà di "metodi di valutazione della probabilità", mentre la definizione è semplicemente quella intuitiva di misura della credibilità di un evento.

La definizione ISO

Nel 1993 l'Organizzazione Internazionale per la Standardizzazione (ISO) ha pubblicato una guida (*"Guide to the expression of uncertainty in measurement"*) per stabilire regole generali per valutare e esprimere l'incertezza della misura applicabili su un vasto spettro di misure. Vi si legge:

. . . In contrast to this frequency-based point of view of probability, an equally valid viewpoint is that probability is a measure of the degree of belief that an event will occur.

For example, suppose one has a chance of winning a small sum of money D and one is a rational bettor. One's degree of belief in event A occurring is $p = 0.5$ if one is indifferent to this two betting choices:

1. receiving D if event A occurs but nothing if it does not occur;
2. receiving D if event A does not occur but nothing if it does occur.

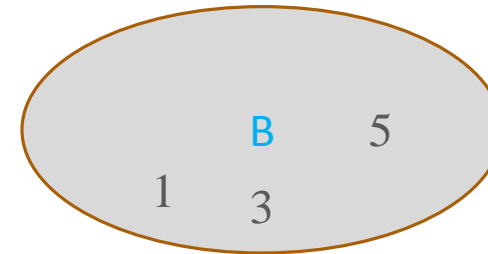
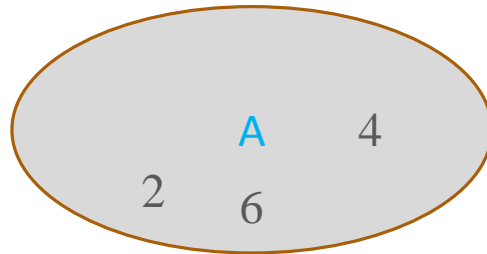
Recommendation INC-1 (1980) upon which this Guide rests implicitly adopts such a viewpoint of probability since it views expressions such as equation (E.6) as the appropriate way to calculate the combined standard uncertainty of a result of a measurement.

Probabilità

Evento: ciò che può essere oggetto di scommessa

Eventi disgiunti: A e B sono disgiunti se non possono verificarsi simultaneamente

Esempio: Lancio un dado; $A = \{\text{pari}\}$, $B = \{\text{dispari}\}$



Evento certo: si verifica con certezza

Esempio: Lancio un dado ed esce un numero tra 1 e 6

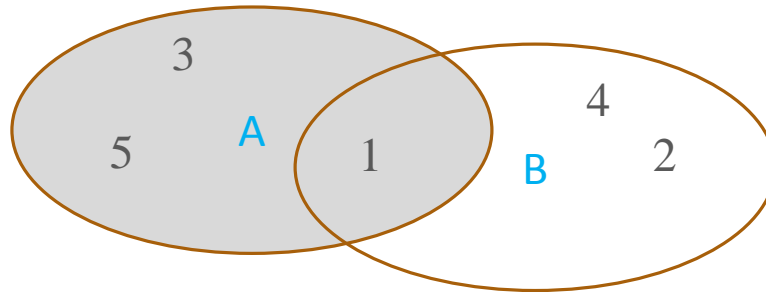
Probabilità

Unione ("somma") di eventi: $C = A \cup B$ è l'evento che si verifica se si verifica A oppure B

Esempio: $A = \{\text{dado dispari}\}$, $B = \{\text{dado} \leq 4\}$
 $A \cup B = \{\text{dado} \leq 5\}$

Intersezione ("prodotto") di eventi: $C = A \cap B$ è l'evento che si verifica se si verificano sia A che B

Esempio: $A = \{\text{dado dispari}\}$, $B = \{\text{dado} \leq 2\}$



Evento negato: $B = \bar{A}$ è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica A.

Esempio: $A = \{\text{dado dispari}\}$, $B = \bar{A} = \{\text{dado pari}\}$.

Definizione di probabilità

A PRIORISTICA:

La probabilità di un evento E , indicata con $P(E)$, è uguale al rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili.

$$P(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

Si chiama anche probabilità a priori di un evento. Questa definizione è sufficiente per i casi più elementari.

A questa definizione può essere posta la seguente critica: non appena la situazione si complica leggermente diventa necessario tenere conto che alcuni casi possono essere più o meno “favorevoli”. Quindi si aggiunge alla definizione la clausola “purché siano ugualmente possibili” che non è chiaramente tanto logica.

Definizione di probabilità

FREQUENZISTICA:

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

dove n = numero di volte in cui si verifica l'evento E , risultato di un certo esperimento; N = numero totale di volte in cui si ripete l'esperimento; n/N è la frequenza relativa statistica dell'evento E .

Questo limite significa che se si compiono più serie di prove, con N sempre più grande, il rapporto n/N tende a stabilizzarsi intorno ad un certo valore, con oscillazioni sempre più piccole man mano che N cresce. Si propone di verificarlo sperimentalmente, ad esempio per l'evento "testa" nel lancio di una moneta.

Questa definizione è buona per le applicazioni, ma non per una rigorosa costruzione matematica.

Definizione "assiomatica" di probabilità:

Dato un evento A gli associo un numero $P(A)$ (la probabilità di A) che gode delle seguenti proprietà (assiomi)

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\{\text{evento certo}\}) = 1$
3. Se A e B sono eventi disgiunti, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Osservazione: Dato un insieme di eventi, ci sono infiniti modi di assegnare le probabilità

Esempio: Moneta con $P(T) = 0.5$

$$\left. \begin{array}{l} P(T \cup C) = (\{\text{evento certo}\}) = 1 \\ P(T \cup C) = P(T) + P(C) \end{array} \right\} \Rightarrow P(C) = 1 - P(T)$$

Però va bene anche:

$$P(T) = p, \quad P(C) = 1 - p$$

(al variare di p ho tutte le possibili monete truccate)

Il calcolo delle probabilità insegna come maneggiare le probabilità supponendo di conoscerle. La loro stima è affare della statistica

Corollari:

1. $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Esempio: Calcolare la probabilità che un dado onesto dia un numero pari o minore di 3

$$A = \{pari\} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{dado < 3\} = \{1, 2\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Probabilità condizionata

Dati due eventi A ed M con $P(M) \neq 0$, la probabilità di A condizionata da M è:

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

Esempio: Trovare la probabilità che un dado dia $\{<4\}$ sapendo che il risultato del lancio è stato pari:

$$P(\{< 4\}|\{pari\}) = \frac{P(\{1, 2, 3\} \cap \{pari\})}{P(\{2, 4, 6\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Teorema della probabilità totale: Se M_1, M_2, \dots, M_n sono disgiunti e $M_1 + M_2 + \dots + M_n = \{\text{evento certo}\}$ allora:

$$P(A) = P(A|M_1)P(M_1) + P(A|M_2)P(M_2) + \dots + P(A|M_n)P(M_n)$$

Teorema di Bayes

Viene impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha scatenato l'evento verificato.

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}$$

Più in generale, se consideriamo un insieme di alternative M_1, M_2, \dots, M_n che partizionano in modo completo lo spazio degli eventi Ω (ovvero $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n M_i = \Omega$) si trova la seguente espressione per la probabilità condizionata:

$$P(M_i|A) = \frac{P(A|M_i)P(M_i)}{P(A)} = \frac{P(A|M_i)P(M_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|M_j)P(M_j)}$$

Dove:

- $P(M)$ è la probabilità a priori o [probabilità marginale](#) di M . « M priori" significa che non tiene conto di nessuna informazione riguardo A .
- $P(M|A)$ è la [probabilità condizionata](#) di M , noto A . Viene anche chiamata probabilità a posteriori, visto che è derivata o dipende dallo specifico valore di A .
- $P(A|M)$ è la probabilità condizionata di A , noto M .
- $P(A)$ è la probabilità a priori di A , e funge da [costante di normalizzazione](#).

Intuitivamente, il teorema descrive il modo in cui le opinioni nell'osservare M siano arricchite dall'aver osservato l'evento A .

Viene impiegato per calcolare la probabilità di una causa che ha scatenato l'evento verificato.

Teorema di Bayes

Esempio: Carta di controllo. M = causa speciale, A = punto fuori dai limiti di controllo.

- Se c'è una causa speciale la carta segnala un fuori controllo con probabilità $P(A|M) = 0.5$
- In assenza di cause speciali, la probabilità di falso allarme è $P(A|\bar{M}) = 0.0027$
- La probabilità di una causa speciale è $P(M) = 0.05$.

Sapendo che è stato segnalato un fuori controllo, quale è la probabilità che ci sia effettivamente una causa speciale? *Devo calcolare $P(M|A)$*

$$P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|\bar{M})P(\bar{M}) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.0027 \cdot 0.95 = 0.025 + 0.002565 = 0.027565$$

Da cui...

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0.025}{0.027565} = 0.907$$

Indipendenza

Due eventi A e B si dicono indipendenti se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Osservazione: Se A e B sono indipendenti:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Interpretazione: L'informazione che B si è verificato non ha nessuna influenza sulla probabilità che si verifichi A.

Osservazione: Disgiunzione e indipendenza sono due concetti diversi!

Esempio: Dado onesto; A = {pari}, B = {dispari}

- A e B sono disgiunti
- $P(A \cap B) = P(\{\text{evento impossibile}\}) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$

Osservazione: In molti casi l'indipendenza viene postulata in base a ragioni fisiche. In tal caso, mi permette di calcolare $P(AB)$ (probabilità dell'evento congiunto) in base alla sola conoscenza di $P(A)$ e $P(B)$.

Se non c'è indipendenza, la conoscenza di $P(A)$ e $P(B)$ è insufficiente a determinare $P(A \cap B)$

Variabili Casuali

Dato lo spazio degli eventi elementari (o insieme di tutte le possibili modalità relative ad un determinato fenomeno, o spazio campione) una “variabile casuale” (random variable) o aleatoria è un’applicazione x che associa gli elementi di Ω a numeri reali. Ovviamente per uno stesso fenomeno possono essere definite più variabili casuali. Inoltre, dato x , l’insieme dei valori che la variabile casuale può assumere è definito, e a questi valori corrisponde una certa probabilità.

Variabile Casuale X : un esperimento casuale il cui esito è un numero reale x

Esempi

1. Lancio di un dado. Possibili esiti: $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Se il dado è "onesto": $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = 1/6$
2. Fermo per la strada una persona a caso e ne misuro la statura.
3. L'errore di misura compiuto da un sensore in una determinata misurazione.

Le variabili casuali possono essere discrete, se l’insieme dei possibili valori è finito o numerabile, o continue, se, almeno idealmente, possono assumere qualsiasi valore reale appartenente ad un intervallo continuo, che può anche essere $(-\infty, +\infty)$.

Nota: Nei tre esempi, ripetendo l'esperimento non ho nessuna garanzia di ottenere lo stesso risultato (casualità).

Funzione di ripartizione

Data una variabile casuale X , la funzione che fa corrispondere ai valori di x , le probabilità cumulate $P(X \leq x)$ viene detta funzione di ripartizione, o distribuzione cumulativa è indicata con F_X ed è così definita:

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \quad F_X(x) := P(X \leq x)$$

La funzione di ripartizione è definita sia per le variabili casuali discrete che per le variabili casuali continue.

[Osservazione: Se due variabili casuali hanno la medesima funzione di ripartizione esse si dicono somiglianti.]

Proprietà della funzione di ripartizione:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ con il secondo limite che è il risultato della condizione di normalizzazione.
3. $F_X(x)$ è **monotona non decrescente**, ovvero $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 < x_2$ vale $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

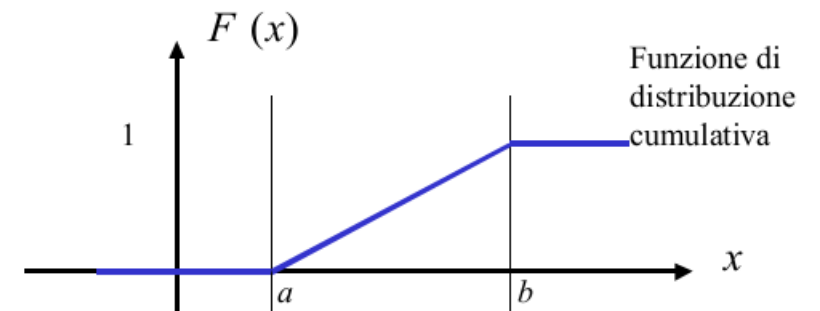
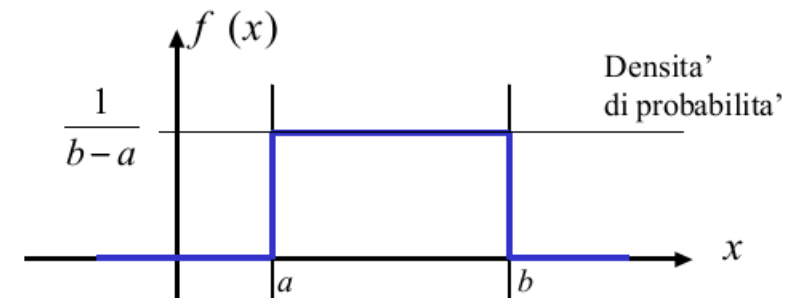
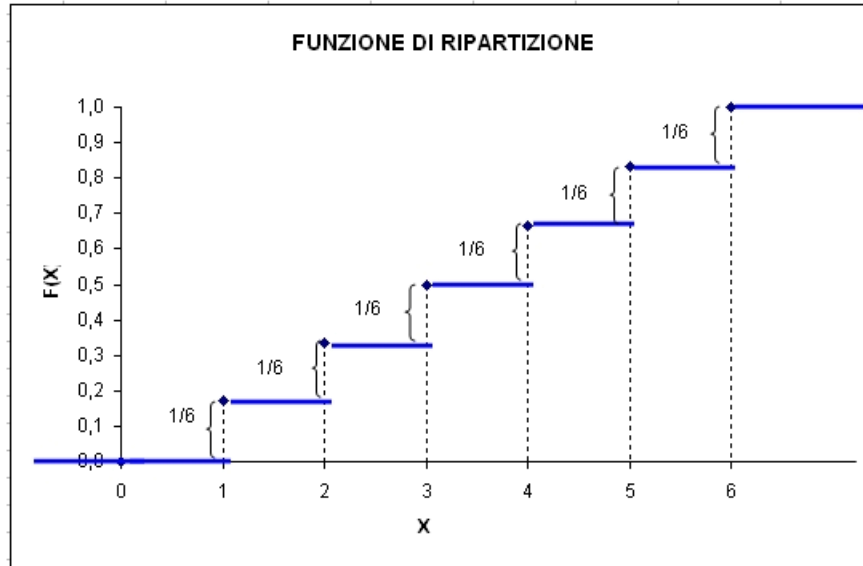
Funzione di ripartizione

4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ dunque la funzione di ripartizione consente di stabilire la probabilità che la variabile casuale semplice X assuma valori compresi in intervalli di tipo $(x_1, x_2]$ dove $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$. A partire da questo posso calcolare anche le altre probabilità, ad esempio: $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) + P(X = x_1) - P(X = x_2)$
5. Nel caso di una variabile casuale discreta, la funzione di ripartizione è continua a destra: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$. Abbiamo anche: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x) \neq F_X(x_0)$ cioè la funzione di ripartizione presenta dei punti di discontinuità di 1° specie (o salti).

ESEMPI: nel lancio di un dado non truccato gli unici risultati possibili sono le facce da 1 a 6, ciascuna con probabilità $1/6$. La funzione di massa di probabilità di questa variabile casuale X e la funzione di ripartizione sono riportate nella seguente tabella:

X	$f(x) = P(X)$	$F_X(x)$
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6

Esempi:



Densità di probabilità

Data la variabile casuale continua X che assume valori nell'intervallo (a, b) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la funzione di densità di probabilità (PDF) o funzione di distribuzione di probabilità è la funzione $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni reale associa il limite per dx che tende a 0, del rapporto tra la probabilità che la variabile casuale assuma valori nell'intervallo $(x, x + dx]$ e l'ampiezza dx .

In simboli:

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lim_{dx \rightarrow 0} \left[\frac{P(x < X \leq x + dx)}{dx} \right]$$

La funzione di densità in x , allora, rappresenta quanto vale la probabilità "intorno ad x " in rapporto all'ampiezza di tale "intorno". Il termine funzione di densità, serve proprio ad evocare quanto è densa la probabilità.

Ogni evento deve essere ricondotto all'unione, negazione o intersezione di intervalli del tipo $(-\infty, x)$.
Abbiamo:

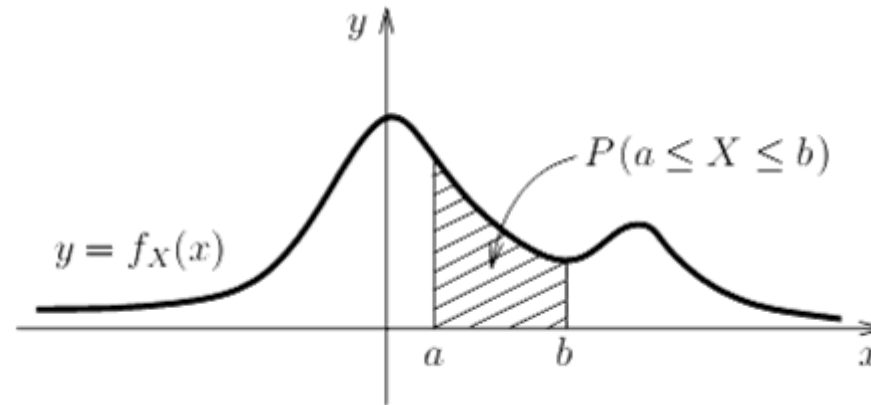
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

Oppure

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Densità di probabilità

La probabilità che una variabile aleatoria continua X assume valori in un intervallo reale (a, b) è data dall'area sottesa al grafico della funzione di densità.



Osservazione:

La funzione di densità, non è una probabilità, è però una funzione legata alla probabilità, perché se voglio calcolare la probabilità che la variabile casuale continua X appartenga ad un intervallo, basta che faccia l'integrale della funzione di densità.

Densità di probabilità

Proprietà della funzione di densità:

1. Una funzione di densità non può mai assumere valori negativi, ossia $f_X(x) \geq 0$ ciò assicura che la probabilità X cada in un qualsiasi intervallo sia non-negativa.
2. L'area totale sottesa alla funzione è uguale a 1, ossia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

(in quanto quest'integrale rappresenta la probabilità dell'evento certo). Il fatto che l'integrale della funzione di densità nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ vale 1 viene nominata condizione di normalizzazione. Per avere questo, ossia per avere la convergenza dell'integrale, la funzione che rappresenta una densità di probabilità deve tendere a zero quando la variabile indipendente tende a più o meno infinito.

3. La probabilità che la variabile casuale continua X assuma un particolare valore dell'intervallo è uguale a zero. Ciò è dovuto al fatto che un singolo valore corrisponde ad un intervallo di ampiezza zero, quindi la corrispondente area è anch'essa zero. Questo per esempio implica che non ha influenza l'inclusione, nel calcolo della probabilità, degli estremi dell'intervallo, ossia:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

Osservazione: La funzione di densità può essere costante o non costante.

Esempio di densità di probabilità

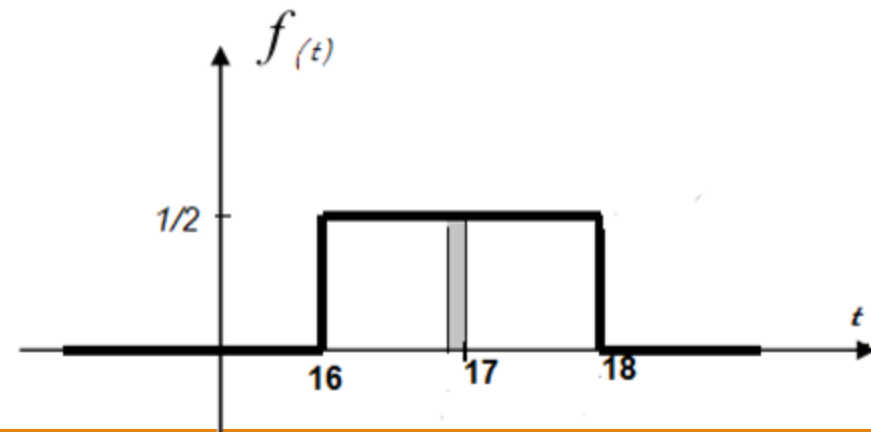
Viene preannunciata una visita che potrebbe arrivare in un istante non meglio precisato, fra le 16:00 e le 18:00. Per un impegno preso in precedenza ci dobbiamo assentare dalle 16:45 alle 17:00. Qual'è la probabilità che la visita arrivi mentre non ci siamo?

L'istante dell'arrivo della visita è una variabile casuale X . Per quanto ne sappiamo, tutti i momenti dalle 16:00 alle 18:00 sono equiprobabili, mentre fuori da questo intervallo la probabilità è zero. Dunque è intuitivo considerare X come una variabile casuale continua, la cui densità f_x ha un valore costante sull'intervallo $[16,18]$ ed ha il valore zero fuori di questo intervallo. Quanto deve valere la costante? Deve essere tale da soddisfare la relazione:

$$\int_{16}^{18} c dt = 1$$

ovvero l'area del rettangolo con base $[16,18]$ e l'altezza c sia 1. Dunque $2c=1$ e perciò abbiamo $c=1/2$. La funzione di densità della variabile X , sarà:

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 16 \\ \frac{1}{2} & \text{per } 16 \leq t \leq 18 \\ 0 & \text{per } t > 18 \end{cases}$$



Valore di aspettazione

Le distribuzioni di probabilità o le funzione densità di probabilità sono di fondamentale importanza nei fenomeni casuali in quanto descrivono le caratteristiche globali del fenomeno stesso e la loro conoscenza permette di stabilire a priori la probabilità che una misura cada in un determinato intervallo.

Le **caratteristiche principali** delle distribuzioni di probabilità sono riassunte tramite parametri o **indici di posizione** (che dicono attorno a quali valori è centrata la distribuzione) e di **dispersione** (che sono legati alla “larghezza” della distribuzione)

Fra gli indici di posizione, particolare importanza ha il “**valore di aspettazione**” (o valore atteso, o valor medio, o media, o speranza matematica, ...) della variabile casuale.

Data una variabile casuale x con funzione densità di probabilità $f(x)$, e una generica funzione $g(x)$, si definisce valore di aspettazione della funzione $g(x)$ per la funzione di distribuzione $f(x)$ la quantità

$$E[g(x)] = \int_a^b g(x)f(x)dx$$

dove (a, b) è l'intero dominio della variabile casuale x . Il valore di aspettazione, che è un numero, indipendente da x , si ottiene quindi integrando $g(x)$ pesata con la densità di probabilità di x .

Valore di aspettazione

Il significato del valore di aspettazione è ancora più evidente nel caso in cui la variabile casuale sia discreta.

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^n g(x_i)p_i$$

Dalla definizione di valore di aspettazione è evidente che:

$$E[a] = a$$

$$E[ag(x)] = aE[g(x)]$$

$$E[a_1g_1(x) + a_2g_2(x)] = a_1E[g_1(x)] + a_2E[g_2(x)]$$

Dove a , a_1 e a_2 sono costanti.

Il valore di aspettazione della variabile casuale x , spesso indicato con μ_x , è quindi:

$$\mu_x = E[x] = \int_a^b xf(x)dx \quad \text{o} \quad \mu_x = E[x] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

L'espressione del valore di aspettazione è molto simile alla definizione di centro di massa

Altri indici di posizione

Oltre al valore di aspettazione μ_x vengono introdotti altri valori 'di posizione':

- il 'valore modale' o **moda**: valore di x per cui $f(x)$ è massima;
- i quantili che specificano la probabilità che la variabile casuale assuma valori in determinati intervalli. I quantili di ordine $\alpha(x)$, dove $0 \leq \alpha \leq 1$, è il valore di x per cui

$$\alpha = F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

- il 'valore mediano' o **mediana**: valore di x per il quale $F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = 0.5$ (quantile $x_{0.5}$);
- i quartili (quantile $x_{0.25}$ e $x_{0.75}$), ovvero i valori di x per cui $F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = 0.25$ o $F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = 0.75$

Nel caso di funzioni di distribuzioni simmetriche valore di aspettazione, valore modale e valore mediano coincidono.

Varianza e deviazione standard

Tra i possibili indici di dispersione, il più usato è la “varianza” della variabile casuale x , in genere indicata con σ_x^2 o $V(x)$

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_a^b (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

Viene inoltre definita la deviazione standard σ_x come la radice quadrata della varianza $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$. La deviazione standard ha le stesse dimensioni della variabile casuale x ed è un indice della larghezza della dispersione dei valori attorno al valore di aspettazione μ_x .

La varianza gode di alcune proprietà notevoli:

- Può essere scritta come: $\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$
- Soddisfa alla disuguaglianza di Čebyšëv: $P(|x - \mu_x| > \lambda \sigma_x) \leq \frac{1}{\lambda^2}$

In base a questa disuguaglianza si ha ad esempio che la probabilità che x non appartenga all'intervallo $(\mu_x - 2\sigma_x, \mu_x + 2\sigma_x) \leq \frac{1}{4} = 0.25$ (o viceversa la probabilità che x appartenga all'intervallo $(\mu_x - 2\sigma_x, \mu_x + 2\sigma_x) > 0.75$) indipendentemente dalla funzione di distribuzione di x .

Momenti di funzioni di distribuzione

Valore di aspettazione e varianza di una variabile casuale sono due “momenti” della funzione densità di probabilità $f(x)$.

I momenti rispetto all'origine e al valore di aspettazione di x sono rispettivamente i valori di aspettazione (quindi quantità numeriche) delle potenze di x e di $[x - E(x)]$. Il momento algebrico di ordine k (o k -esimo momento algebrico) e il momento centrale di ordine k sono definiti come:

$$\mu_k^* = E[x^k] \quad e \quad \mu_k = E[(x - \mu_x)^k]$$

Il momento di ordine 0 vale 1 nel primo caso ($x^0 = 1$, e quindi ho la sola condizione di normalizzazione) e nel secondo caso ($(x - \mu_x)^0 = 1$).

Si vede in modo altrettanto semplice che $\mu_1^* = \mu_x$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma_x^2$. Il momento centrale μ_3 è invece legato alla asimmetria della funzione densità di probabilità, ed è uguale a zero per funzioni simmetriche.

I momenti caratterizzano completamente le funzioni di distribuzione, e si può dimostrare sotto ipotesi non particolarmente restrittiva, che due funzione densità di probabilità con gli stessi momenti coincidono.

Distribuzioni di probabilità e funzioni di distribuzione

In alcuni casi, **facendo delle ipotesi sul fenomeno statistico** considerato, introducendo cioè un modello probabilistico, è possibile ricavare le distribuzioni di probabilità o le funzioni di distribuzione per le variabili casuali che intervengono nel fenomeno.

Le probabilità così ottenute possono essere poi confrontate con risultati sperimentali ottenuti ripetendo molte volte le misure, fornendo informazioni sulla validità del modello probabilistico.

Alcune di queste funzione densità di probabilità sono particolarmente importanti e diffuse.

Vediamo quelle più legate agli argomenti trattati durante il corso.

Distribuzione uniforme discreta

Una variabile casuale discreta ha distribuzione uniforme se tutti i valori che può assumere sono equiprobabili. Se x può assumere i valori $x_i, i = 1, \dots, n$, le probabilità relative ai diversi valori dovranno essere uguali: $p_i = p$ per ogni i . Usando la condizione di normalizzazione, si ottiene $p = 1/n$.

Il valore di aspettazione di x

$$\mu_x = E[x] = \sum_{i=1}^n p x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

è la media aritmetica dei possibili valori, e la varianza:

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2$$

è la media dei quadrati degli scarti dal valore di aspettazione.

Esempi

Come già detto, nel lancio di una moneta, i possibili valori di x sono solo due: 1 o 0 (T o C) e a priori ci si aspetta che siano equiprobabili, e che quindi x abbia una distribuzione uniforme con $p_i = 0.5$. Allora

- Valore di aspettazione è $\mu_x = 0.5$
- Deviazione standard vale $\sigma_x^2 = 0.5$.

Nel lancio di un dado, i possibili valori di x sono sei: 1, 2, 3, \dots , 6 e di nuovo a priori ci si aspetta che siano equiprobabili, e che quindi x abbia una distribuzione uniforme con $p_i = 1/6$. In questo caso abbiamo:

- Valore di aspettazione è $\mu_x = 3.5$
- Deviazione standard vale $\sigma_x^2 = 1.7$.

Distribuzione uniforme continua

Una variabile casuale continua definita nell'intervallo (a, b) ha funzione di distribuzione uniforme se in (a, b) è $f(x) = h = \text{cost.}$, in modo che la probabilità che x assuma valori in intervalli diversi ma di stessa ampiezza contenuti in (a, b) sia la stessa. Per la condizione di normalizzazione, deve essere $h = 1/(b - a)$, e quindi

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

il valore di aspettazione è il punto medio dell'intervallo

$$\mu_x = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b x dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{a + b}{2}$$

La varianza può essere calcolata allo stesso modo con conti leggermente più lunghi e si ottiene

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu_x^2 = \frac{1}{b - a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

La deviazione standard vale quindi $\sigma_x = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$. La probabilità che l'intervallo $(\mu_x - \sigma_x, \mu_x + \sigma_x)$ contenga il valore vero è $P(\mu_x - \sigma_x < x < \mu_x + \sigma_x) = 0.577$.

* Il tempo di attesa di un evento periodico (come l'arrivo di un autobus a una certa fermata in condizioni di traffico costante) idealmente misurato con uno strumento di sensibilità infinita ha una distribuzione uniforme.

Risoluzione di lettura e distribuzione uniforme

La distribuzione uniforme viene utilizzata quando mancano informazioni sulla distribuzione della variabile casuale all'interno di un intervallo e può essere utilizzata anche nel caso di una misura di una grandezza fisica con uno strumento digitale.

Se ad esempio si misura una massa M , ottenendo un valore $m = 12.01 \text{ g}$ con un'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura $\Delta m = 0.005 \text{ g}$, si dirà che $M = 12.010 \pm 0.005 \text{ g}$, intendendo che l'intervallo $(12.005 \text{ g}, 12.015 \text{ g})$ include il valore "vero" di M , senza però avere indicazioni su eventuali valori più probabili all'interno dell'intervallo.

Volendo associare un'incertezza statistica alla misura, cosa in certi casi particolarmente utile, si può ipotizzare che M abbia una distribuzione uniforme (benché abbia un valore ben definito) nell'intervallo $(12.005 \text{ g}, 12.015 \text{ g})$ e quindi valore di aspettazione $\mu_M = 12.010 \text{ g}$ e deviazione standard

$$\sigma_M = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} = 0.003 \text{ g}$$

Si potrà quindi dire che $M = 12.010 \pm 0.003 \text{ g}$ sapendo che il contenuto di probabilità di questa affermazione è del 58%.

Distribuzione binomiale

Consideriamo un fenomeno statistico che possa verificarsi soltanto secondo due modalità mutuamente esclusive: A (favorevole, successo) e \bar{A} (sfavorevole, insuccesso).

Supponiamo che la probabilità che il fenomeno si verifichi secondo la modalità A sia p , e quindi che la probabilità che il fenomeno si verifichi secondo la modalità \bar{A} sia $q = 1 - p$. Assumendo che gli eventi siano tutti indipendenti, la probabilità che su n eventi ci siano k successi (o che, se il fenomeno si verifica n volte, si verifichi k volte secondo la modalità A) è data da

$$P(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Questa distribuzione può essere ottenuta tenendo conto che:

- La probabilità che i primi k eventi siano favorevoli e i rimanenti $n - k$ siano sfavorevoli, essendo gli eventi indipendenti, è il prodotto di k volte la probabilità che il singolo evento sia favorevole e di $n - k$ volte la probabilità che il singolo evento sia sfavorevole, cioè $P_k = p^k q^{n-k}$.
- Per qualsiasi altra sequenza di k eventi favorevoli e $n - k$ eventi sfavorevoli (ad esempio il primo favorevole, il secondo sfavorevole, poi $k - 1$ favorevoli e infine $n - k - 1$ sfavorevoli, ecc.), la probabilità è la stessa: $P_k = p^k q^{n-k}$.
- Per ottenere la probabilità cercata bisogna quindi moltiplicare P_k per il numero di tutte le possibili combinazioni in cui si hanno k eventi favorevoli e $n - k$ eventi sfavorevoli, cioè per

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

Distribuzione binomiale (o di Bernoulli)

L'insieme delle probabilità $P(k; n, p)$ costituisce la distribuzione binomiale (o di Bernoulli) per la variabile casuale discreta k ; questa distribuzione di probabilità dipende da due soli parametri: n , il numero totale di eventi, e p , la probabilità che un evento sia favorevole.

- La distribuzione binomiale è normalizzata

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

- Il valore di aspettazione di k è $E[k] = np$, infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k P(k; n, p) &= \sum_{k=0}^n \frac{kn!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{k! (n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l! (n-l)!} p^{l+1} q^{n-l-1} = np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{l!}{l! (n-l-1)!} p^l q^{n-l-1} = np \end{aligned}$$

- La varianza è $\sigma_k^2 = npq$

Varianza della binomiale

Dalla definizione:

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^n (k - E[k])^2 P(k) = E[k^2] - E[k]^2 = E[k(k-1)] + E[k] - E[k]^2$$

Con $E[k] = np$ ed $E[k]^2 = (np)^2$. Dobbiamo quindi calcolare $E[k(k-1)]$:

$$\begin{aligned} E[k(k-1)] &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} p^l q^{m-l} \end{aligned}$$

Ovvero $E[k(k-1)] = n(n-1)p^2$. Unendo i tre termini ho

$$\sigma_k^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

La distribuzione è simmetrica per $p = 0.5$ e tende comunque a diventarlo per n grande.

Applicazioni

La distribuzione binomiale ha moltissime applicazioni, dal lancio del dado (ad es probabilità di ottenere in N lanci k volte il numero 4) al numero di eventi previsto nei diversi intervalli di un istogramma trattata nell'esempio.

La sua importanza sta anche nel fatto che, al limite per $n \rightarrow \infty$ permette di ottenere la funzione di distribuzione di Gauss se p rimane costante e la distribuzione di Poisson se np rimane costante, entrambe usatissime in fisica.

Distribuzione binomiale e istogrammi

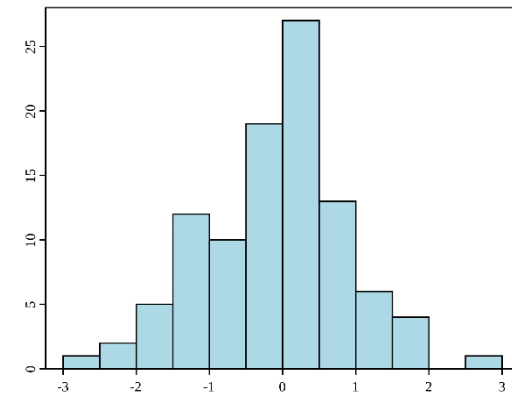
Consideriamo un particolare intervallo i di un istogramma e consideriamo favorevole un evento se il valore cade nell'intervallo scelto. Su un totale di n eventi indipendenti, la probabilità di averne n_i in quell'intervallo è data dalla distribuzione binomiale. Il numero di eventi attesi nell'intervallo considerato è $E[n_i] = np_i$, dove p_i è la probabilità che il singolo evento cada nell'intervallo considerato.

La varianza di n_i è $\sigma_{n_i}^2 = np_i(1 - p_i) = n_i(1 - n_i/n)$ e quindi la deviazione standard è $\sigma_{n_i} = \sqrt{n_i(1 - n_i/n)}$

La probabilità p_i di un evento favorevole può non essere nota a priori (può non essere nota la distribuzione di probabilità corrispondente all'istogramma). Una volta costruito l'istogramma, però, si può prendere come valore stimato di p_i il valore $\hat{p}_i = n_i^m/n$ dove n è il numero totale di eventi e n_i^m è il numero misurato di eventi nell'intervallo considerato in n prove.

La varianza del numero di eventi nell'intervallo considerato diventa $\sigma_{n_i}^2 = n_i^m(1 - n_i^m/n)$. Nel caso $p \rightarrow 0$, che corrisponde a un numero elevato di intervalli, si ha $\sigma_{n_i} = \sqrt{n_i^m}$.

L'incertezza assoluta aumenta con n_i , e quindi con n , ma quella relativa diminuisce.



Distribuzione di Poisson

È una funzione di distribuzione fondamentale nella fisica nucleare, ed è un caso limite della distribuzione binomiale.

Si voglia determinare la probabilità di osservare k eventi in un dato intervallo di tempo t , nelle seguenti ipotesi:

- a) La presenza/assenza dell'evento al tempo t non dipende dalla storia degli eventi prima del tempo t
- b) La probabilità di un singolo evento aumenta proporzionalmente alla lunghezza del tempo considerato, secondo una costante μ intrinseca del fenomeno considerato
- c) La probabilità di due eventi contemporanei è 0

Allora la distribuzione degli eventi segue la distribuzione di Poisson:

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \quad \text{o} \quad P_k(m) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

Con $E[k] = \hat{k} = \mu t$ e $E[(k - \hat{k})^2] = \sigma^2 = \mu t$ o $E[k] = \hat{k} = m$ e $E[(k - \hat{k})^2] = \sigma^2 = m$

Per k sufficientemente grandi (> 5) la distribuzione di Poisson tende ad una distribuzione gaussiana.

Funzione di distribuzione di Gauss

La funzione di distribuzione di Gauss (o distribuzione normale) è una delle più importanti in statistica. Dipende da 2 parametri, indicati con μ e σ^2 , ed ha la forma

$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La funzione $f(x)$ tende a zero per $x \rightarrow \pm\infty$, è simmetrica rispetto a μ ed ha due punti di flesso per $x = \mu \pm \sigma$.

- La condizione di normalizzazione è rispettata: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$
- Il valore di aspettazione vale: $\mu_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$
- La varianza vale: $\sigma_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$

Come si può mostrare facendo la sostituzione di variabile $y = (x - \mu)/\sqrt{2}\sigma$ e sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

Significato probabilistico

I due parametri μ e σ^2 hanno quindi proprio il significato di valore di aspettazione e varianza di x . Poiché la distribuzione di Gauss è molto usata, i valori dei suoi integrali su intervalli finiti (e la sua funzione cumulativa) si trovano tabulati. In particolare si ha che:

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0.683$$

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0.954$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0.997$$

cioè la variabile casuale x ha una probabilità del 68.3% di assumere un valore nell'intervallo $(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$, ecc.

Nel caso in cui è $\mu_x = 0$ e $\sigma_x^2 = 1$, la funzione di distribuzione di Gauss è detta funzione di distribuzione normale standard:

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funzione di distribuzione di Gauss, distribuzione binomiale ed errori accidentali

Si può dimostrare che, se la variabile casuale k ha una distribuzione binomiale

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

la quantità

$$z = \frac{k - E[k]}{\sigma_k} = \frac{k - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}$$

tende ad avere una distribuzione normale standard quando $N \rightarrow \infty$ con p costante.

Questo processo di limite è alla base della dimostrazione che la distribuzione degli errori accidentali nelle misure ripetute è la funzione di distribuzione di Gauss. Nelle ipotesi che

- tutte le misure siano affette da errori accidentali che consistono in una differenza (casuale) tra valore misurato x e valore vero a (assumendo esista) della grandezza fisica. Se u è il generico errore in una misura, è $x = a + u$;
- gli errori accidentali siano l'effetto di un numero N molto elevato di fenomeni, ciascuno dei quali introduce un errore elementare molto piccolo;
- questi errori elementari siano tutti uguali in valore assoluto e abbiano la stessa probabilità ($p = 0.5$) di essere positivi o negativi;
- gli errori elementari siano tutti indipendenti tra loro,

Funzione di distribuzione di Gauss, distribuzione binomiale ed errori accidentali

La probabilità che l'errore accidentale u abbia un valore $u_k = \varepsilon k - (N - k)\varepsilon$, cioè sia dovuto al contributo positivo di k errori elementari e a quello negativo dei rimanenti $N - k$, è data da:

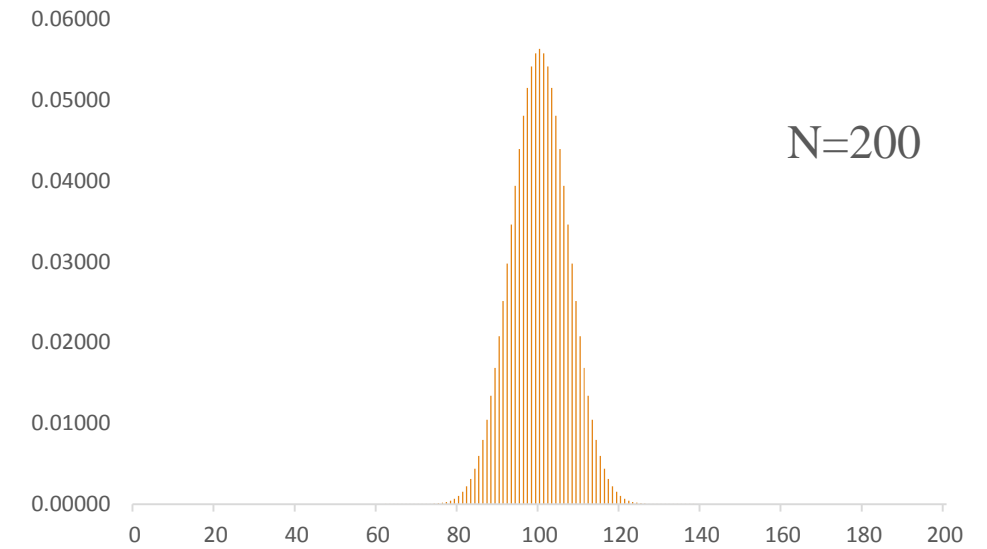
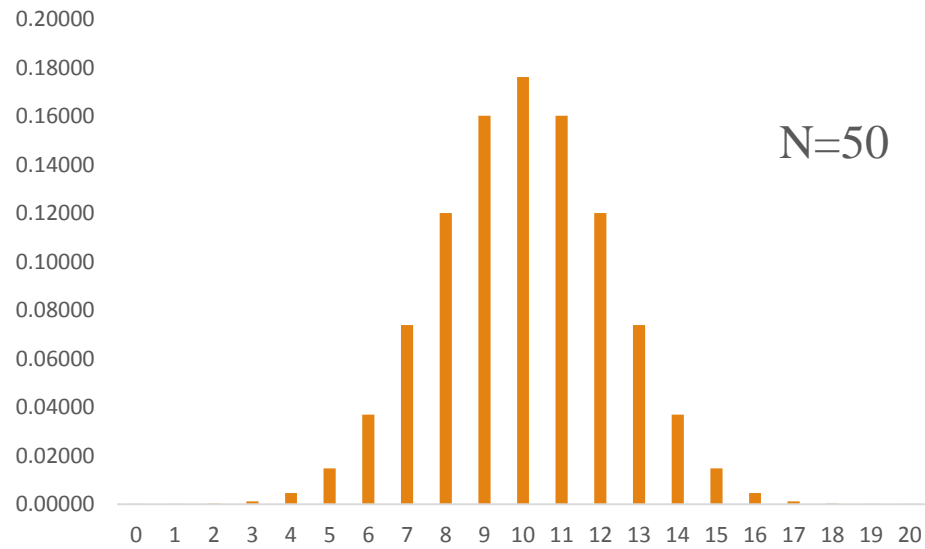
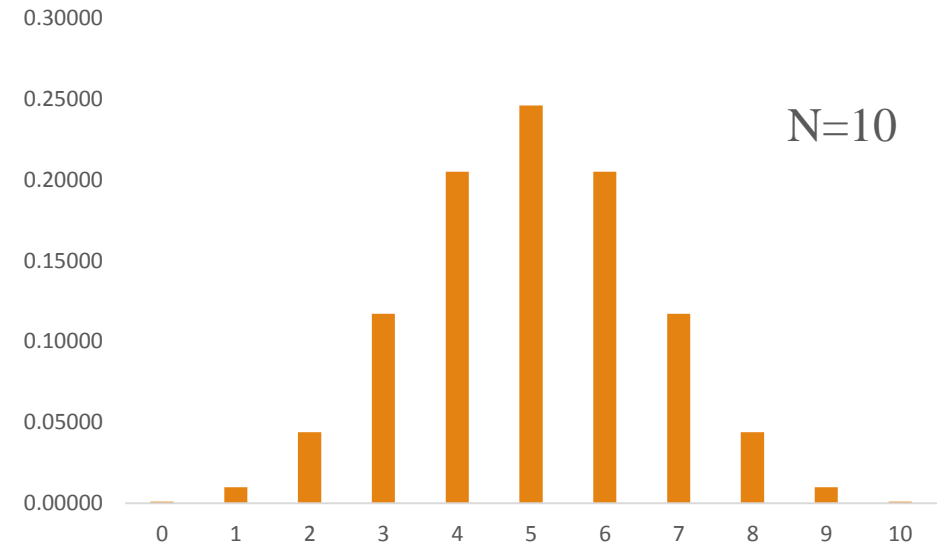
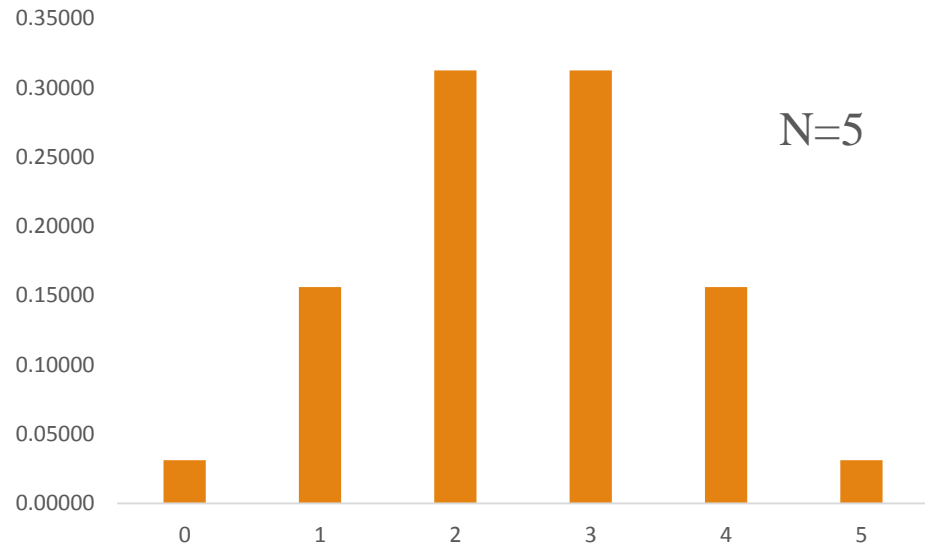
$$P(u = u_k) = P(K) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Essendo $p = 0.5$ e quindi $E[k] = Np = 0.5N$, si ottiene $E[u_k] = E[k] - (N - E[k])\varepsilon = 0$, come intuitivamente ci si aspettava. Al limite per $N \rightarrow \infty$ con p costante, u_k diventa una variabile continua u con funzione di distribuzione gaussiana:

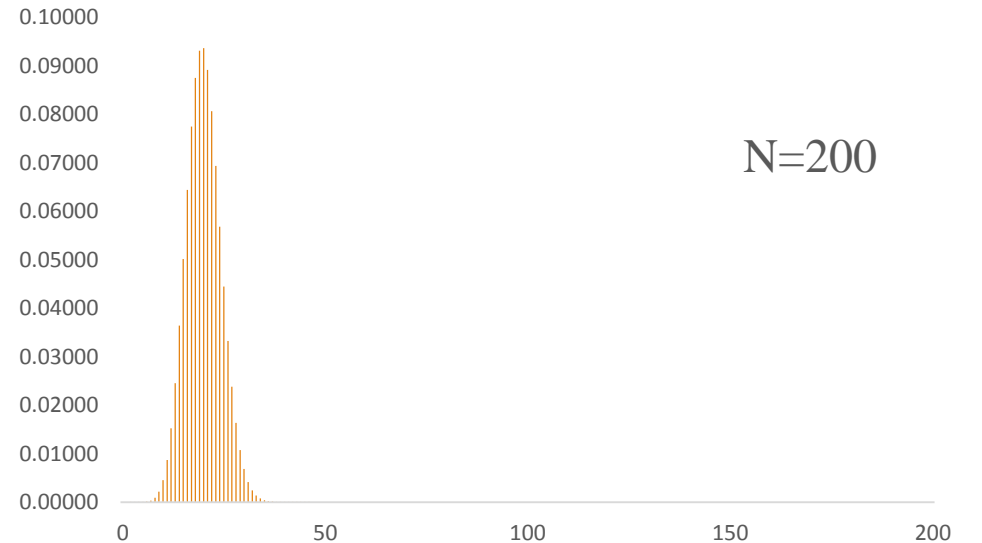
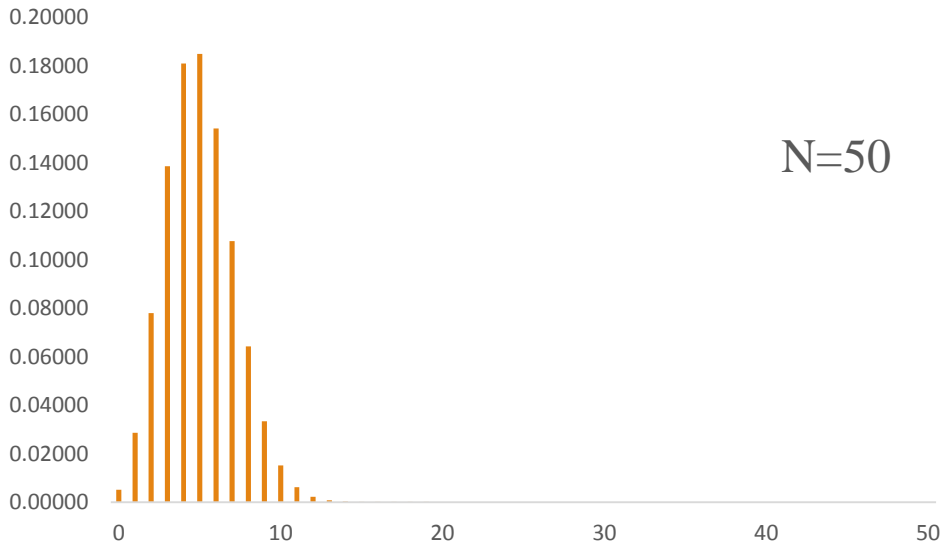
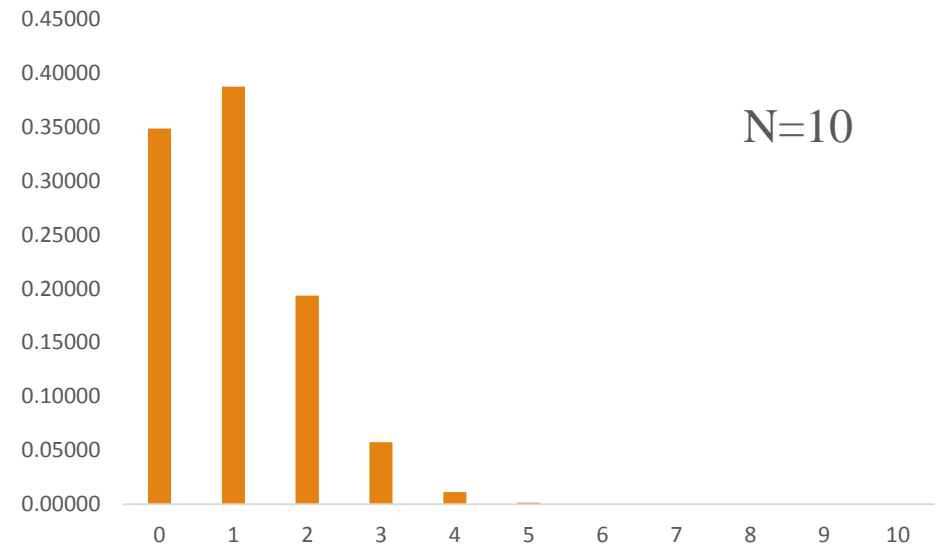
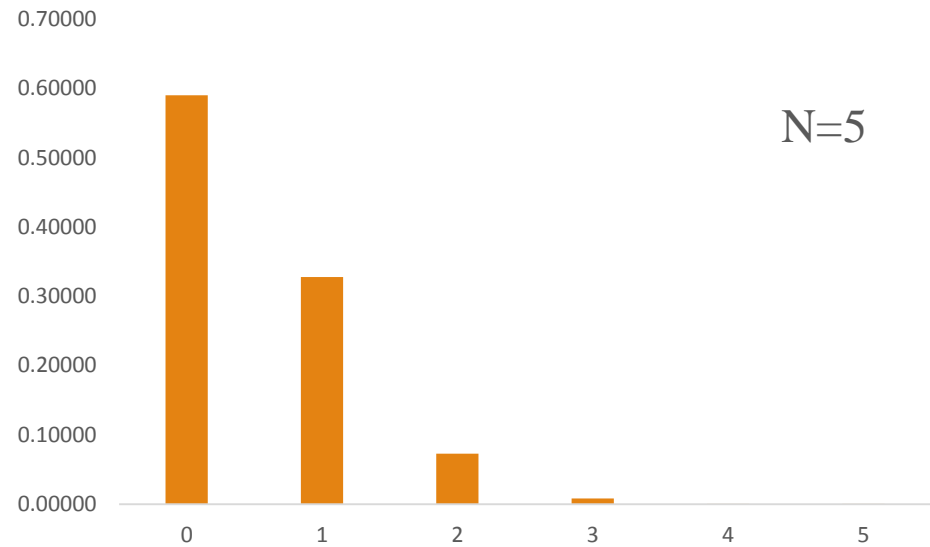
$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}}$$

Se, per una certa misura σ_u^2 fosse nota, potremmo calcolare la probabilità che l'errore accidentale in una operazione di misura cada in uno specifico intervallo. In generale non è questo il caso, e σ_u^2 deve essere stimata a partire dai risultati di misura.

Esempi ($p = 0.5$)



Esempi ($p = 0.1$)



Dimostrazione

La dimostrazione che la distribuzione di Bernoulli tende alla funzione di Gauss quando il numero di tentativi $N \rightarrow \infty$ (noto come il Central Limite theorem di Moivre e Laplace) è piuttosto lunga e laboriosa.

- Fu inizialmente dimostrato per il caso $p = 1/2$ da Abraham de Moivre in *The Doctrine of Chances* nel 1738
- Pierre Simon Laplace ha riscoperto la dimostrazione e l'ha estesa al caso $p \neq 1/2$ in *Théorie Analytique des Probabilités* nel 1812. Anche Gauss contribuì alla dimostrazione più generale.
- Laplace ha anche scoperto un generalizzazione che ha chiamato Teorema del limite centrale, molto più generale rispetto al caso della distribuzione binomiale, ma la sua dimostrazione non era rigorosa.
- Nel 1901-1902 il matematico russo Aleksandr Liapunof ha dato la prima prova rigorosa del teorema del limite centrale.
- Nel 1922 George Polya ha per primo usato il termine 'limite centrale'

Cenni sulla dimostrazione

Se consideriamo una variabile aleatoria binomiale S_n , che possa assumere tutti i valori tra 0 e n , la probabilità che assume il valore k è $P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$, quello che vogliamo dimostrare è che, se prendiamo 2 valori $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Per dimostrare il teorema c'è la necessità di usare diversi lemmi:

- i. Normalizzazione della distribuzione normale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ as
- ii. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+y)} (e^{-y^2/2} - e^{-(y+1)^2/2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{y^2}{2}}$
- iii. $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{y^2}{2}}$
- iv. La convergenza del teorema di Moivre-Laplace è uniforme sia in a che in b
- v. Per ogni $n > 0$ si può scrivere $n! = \sqrt{2\pi n}^{n+1/2} e^{-n} (1 + \varepsilon_n)$, esiste sempre un valore reale A tale che $|\varepsilon_n| < \frac{A}{n}$

Cenni sulla dimostrazione

vi. de Moivre-Laplace Binomial Point Mass Limit:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} (1 + \delta_n(k))$$

dove per $a > 0$ vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|k-np| < a\sqrt{n}} |\delta_n(k)| = 0$

vii. Se $[a, b]$ è un intervallo di \mathbb{R} e sia f una funzione definita su \mathbb{R} che sia 0 al di fuori di $[a, b]$ e continuo in $[a, b]$, allora per ogni t :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \geq 0} h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + kh) = \int_a^b f(x) dx$$

Gauss come limite della binomiale

Sia definito un intervallo $K_n = [a\sqrt{np(1-p)}, b\sqrt{np(1-p)}]$, prendiamo una variabile aleatoria S_n con distribuzione binomiale allora la probabilità che $S_n - np \in K_n$ è data da:

$$\begin{aligned} P(S_n - np \in K_n) &= \sum_{k=0}^n 1_{K_n}(k - np) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \sum_{k=0}^n 1_{K_n}(k - np) e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} (1 + \delta_n(k)) \end{aligned}$$

All'aumentare di n la sommatoria può essere sostituita con le somme su tutto \mathbb{Z} ed otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \delta_n}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1_{[a,b]} \left(\frac{k}{\sqrt{np(1-p)}} - \sqrt{\frac{np}{1-p}} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sqrt{np(1-p)}} - \sqrt{np-p} \right)^2}$$

Dei 2 termini $1 + \delta_n$, mentre il termine con 1 converge ad un valore finito, il termine con δ_n converge a 0 e può essere trascurato.

Con $h = 1/\sqrt{np(1-p)}$ e $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, per il lemma vii dimostro il teorema per un intervallo finito $[a, b]$

Gauss come limite della binomiale

- Il prossimo passo consiste nel dimostrare che il limite vale anche quando $a \rightarrow -\infty$ e b è finito e reale
- Si dimostra che il teorema vale anche per a finito e reale e $b \rightarrow +\infty$
- Che dimostra la validità del teorema su $[-\infty, +\infty]$

- Dimostrazione completa disponibile in rete (per i *mathematically oriented*) disponibile, ad esempio, sul sito:

<http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/ProbabilityTheory/Lessons/BernoulliTrials/DeMoivreLaplaceCLT/demoivrelaplaceclt.pdf>

Funzioni di distribuzione per più variabili casuali

Nel caso in cui il fenomeno statistico sia caratterizzato da n variabili casuali, generalizzando quanto visto per una variabile casuale, si introduce la “densità di probabilità composta” o “congiunta” $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definita in modo che la probabilità che le variabili casuali assumano valori in determinati intervalli sia data da:

$$P(a_1 < x_1 < a_1 + dx_1, \dots, a_n < x_n < a_n + dx_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Come nel caso di una variabile casuale, la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deve essere limitata e definita positiva in tutto il campo di definizione delle variabili casuali $\Omega_{\vec{x}} = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ e deve essere normalizzata, ciò deve essere

$$\int_{\Omega_{\vec{x}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

La funzione di distribuzione per la generica variabile casuale x_i , che da la densità di probabilità per x_i indipendentemente dal valore (o per ogni valore) delle altre variabili casuali è la funzione di distribuzione “marginale”

$$f_{x_i}(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

dove l'integrazione è su tutte le variabili $x_j \neq x_i$

Funzioni di distribuzione per più variabili casuali

Generalizzando le espressioni introdotte per il caso di una variabile casuale, valori di aspettazione e varianze sono dati da:

$$E[x_i] = \mu_i = \int_{\Omega_{\vec{x}}} x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$E[(x_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2 = \int_{\Omega_{\vec{x}}} (x_i - \mu_i)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Nel caso di più variabili casuali si deve tener conto anche della correlazione tra le variabili. Ciò viene fatto introducendo la “covarianza” di due variabili casuali:

$$E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = \text{cov}(x_i, x_j) = \int_{\Omega_{\vec{x}}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

che è, come valore di aspettazione e varianza, una quantità numerica. La covarianza può anche essere scritta come

$$\text{cov}(x_i, x_j) = E[x_i x_j] - \mu_i \mu_j$$

Funzioni di distribuzione per più variabili casuali

La covarianza può anche essere scritta come

$$\text{cov}(x_i, x_j) = E[x_i x_j] - \mu_i \mu_j$$

(basta sviluppare il doppio prodotto nell'integrale).

In genere, per esprimere la correlazione statistica tra due variabili viene utilizzato il “coefficiente di correlazione”:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

rapporto tra la covarianza e il prodotto delle deviazioni standard. Deve essere:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$$

Nel caso $\rho_{ij} = 1(-1)$ si correlazione (anti correlazione) completa tra le due variabili, mentre per variabili indipendenti vale $\rho_{ij} = 0$.

Funzioni di distribuzione per più variabili casuali

Una semplificazione notevole nella trattazione di fenomeni statistici che coinvolgono più variabili si ha nel caso in cui le variabili casuali siano statisticamente indipendenti. Infatti, per il significato di funzione di distribuzione, e per il teorema delle probabilità composte ($P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ se A e B sono eventi indipendenti) è:

$$\begin{aligned} &P(a_1 < x_1 < a_1 + dx_1, \dots, a_n < x_n < a_n + dx_n) \\ &= P(a_1 < x_1 < a_1 + dx_1) \cdot P(a_2 < x_2 < a_2 + dx_2) \cdots P(a_n < x_n < a_n + dx_n) \\ &= f_1(a_1)dx_1 \cdots f_n(a_n)dx_n \end{aligned}$$

dove $f_i(x_i)$ è la funzione di distribuzione della variabile x_i , normalizzata. La funzione di distribuzione delle n variabili casuali è quindi fattorizzata:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

Ne consegue immediatamente che valori di aspettazione e varianze sono date dalle espressioni introdotte nel caso di una variabile casuale:

$$E[x_i] = \mu_i = \int_{a_i}^{b_i} x_i f_i(x_i) dx_i \quad \text{e} \quad E[(x_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2 = \int_{a_i}^{b_i} (x_i - \mu_i)^2 f_i(x_i) dx_i$$

Inoltre

$$E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = \text{cov}(x_i, x_j) = \int_{a_i}^{b_i} x_i f_i(x_i) dx_i \int_{a_j}^{b_j} x_j f_j(x_j) dx_j - \mu_i \mu_j = 0$$

Variabili indipendenti con funzione di distribuzione di Gauss

È questo un esempio particolarmente interessante per le applicazioni nel corso di Laboratorio 1 e verrà ripreso nel seguito. Supponiamo che le variabili x_i siano indipendenti e abbiano tutte funzione di distribuzione Gaussiana:

$$f_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

In questo caso la funzione di distribuzione congiunta è:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Se poi le varianze e i valori medi sono rispettivamente uguali a σ e μ per tutte le variabili, si ottiene:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Funzioni di variabili casuali

Se $y = y(x)$ è una funzione della variabile casuale x , anche y deve essere una variabile casuale e, come tale, avrà una sua funzione di distribuzione. Indicando con $f(x)$ e $g(y)$ le funzioni di distribuzione di x e y , nel caso di corrispondenza biunivoca deve essere

$$f(x_a)dx = P(x_a < x < x_a + dx) = P(y_a < y < y_a + dy) = g(y_a)dy$$

dove $y_a = f(x_a)$. La determinazione di $g(y)$ si riduce quindi ad una trasformazione di variabile. Se esiste la funzione inversa $x = x(y)$, allora

$$g(y)dy = f(x(y))dx(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| dy$$

ovvero

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|$$

Il modulo della derivata fa sì che la funzione densità di probabilità $g(y)$ sia definita positiva.

Funzioni di variabili casuali

Nel caso in cui la funzione $y = y(x)$ non sia biunivoca, cioè se esistono m valori x_j tali che $y = y(x_j)$, la funzione di distribuzione di y è data da

$$g(y) = \sum_{j=1}^m f(x_j(y)) \left| \frac{dx_j(y)}{dy} \right|$$

Ad esempio, nel caso $y = ax + b$, e x è distribuito secondo $f(x)$, sarà $x(y) = (y - b)/a$; quindi

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| = \frac{f((y - b)/a)}{|a|}$$

Mentre, nel caso $y = ax^2$ (con $a > 0$), ho due valori possibili per x ; $x = +\sqrt{y/a}$ e $x = -\sqrt{y/a}$, per cui

$$g(y) = f\left(+\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{ya}} + f\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{ya}}$$

Funzioni di variabili casuali

Come ulteriore esempio si può considerare il caso di una variabile casuale x con distribuzione $N(\mu, \sigma)$. La variabile $y = (x - \mu)/\sigma$ ha distribuzione normale standard $N(0,1)$. Infatti è $x = \sigma y + \mu$, $dx/dy = \sigma$ e quindi

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Non sempre la funzione di distribuzione $g(y)$ può essere calcolata facilmente e/o ha un'espressione semplice, che permetta di calcolare con un'integrazione non numerica valore di aspettazione e varianza di y . In genere, comunque, la conoscenza di valore di aspettazione e varianza di y sono sufficienti. Sviluppando in serie di y in un intorno di $\mu_x = E[x]$, si ottengono le espressioni (approssimate):

$$\mu_y = E[y] \cong y(x = \mu_x) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]_{x=\mu_x} \sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = var(y) = \left(\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\mu_x} \right)^2 \sigma_x^2$$

qualunque sia la funzione di distribuzione di x .

Funzioni di variabili casuali

Sviluppando $y(x)$ in serie

$$y(x) = y(x = \mu_x) + \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\mu_x} (x - \mu_x) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=\mu_x} (x - \mu_x)^2 + \dots$$

e usando la definizione di valore di aspettazione si ha

$$\begin{aligned} \mu_y &= \int_{\Omega_x} y(x) f(x) dx \cong y(x = \mu_x) + \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\mu_x} \int_{\Omega_x} (x - \mu_x) f(x) dx + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=\mu_x} \int_{\Omega_x} (x - \mu_x)^2 f(x) dx + \dots \\ &= y(x = \mu_x) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=\mu_x} \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Mentre usando la definizione di varianza

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{\Omega_x} (y(x) - \mu_y)^2 f(x) dx \cong \int_{\Omega_x} \left(\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\mu_x} (x - \mu_x) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=\mu_x} (x - \mu_x)^2 \right)^2 f(x) dx \\ &\cong \left(\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=\mu_x} \right)^2 \int_{\Omega_x} (x - \mu_x)^2 f(x) dx + \dots \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il valore di aspettazione, bisogna notare che $\mu_y = y(\mu_x)$ e' una buona approssimazione solo se y è una funzione lineare di x . La seconda espressione è anche nota come "legge di propagazione della varianza".

Errori accidentali e misure ripetute

Abbiamo visto che la misura di una grandezza fisica a è affetta da un errore u che è una variabile casuale con funzione di distribuzione gaussiana $N(0, \sigma_u^2)$:

$$h(u) = N(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

Il risultato dell'operazione di misura $x = a + u$ è una funzione di u ed è quindi una variabile casuale con funzione di distribuzione che possiamo calcolare. Poiché $u = x - a$, e $du/dx = 1$, la distribuzione di x è

$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Quindi i risultati ottenuti nelle singole operazioni di misura x hanno una funzione di distribuzione di Gauss con valore di aspettazione $\mu_x = a$, cioè centrata sul valore vero della grandezza fisica. La deviazione standard è $\sigma_x^2 = \sigma_u^2$ e dipende dalla precisione degli strumenti utilizzati. Utilizzando le proprietà della distribuzione di Gauss, se a e x sono noti, si può quindi calcolare la probabilità che, eseguendo una misura, il risultato x_1 cada in un certo intervallo. In particolare sarà

$$P(a - \sigma_x \leq x_1 \leq a + \sigma_x) = 0.683$$

Ma possiamo anche affermare che la probabilità che l'intervallo $(x_1 - \sigma_x, x_1 + \sigma_x)$ contenga il valore vero a è sempre del 68%.

Pro memoria

Come già detto,

- se la risoluzione di lettura è bassa più grande delle fluttuazioni statistiche, le fluttuazioni del valore misurato non sono apprezzabili, domina l'incertezza "massima" dovuta alla risoluzione di lettura, e la trattazione statistica può essere usando la distribuzione uniforme, che da $\sigma_x = \Delta x / \sqrt{3}$.
- Viceversa, si può passare dall'incertezza statistica dovuta a errori accidentali all'incertezza massima ponendo $\Delta x = 3\sigma_x$. Infatti, per le proprietà della funzione di Gauss, all'affermazione $x_1 - 3\sigma_x \leq a \leq x_1 + 3\sigma_x$ corrisponde una probabilità di 0.997, molto vicina a 1.

Compatibilità delle misure

Se si misura la stessa grandezza fisica di valore vero a più volte, i risultati devono essere compatibili.

- Nel caso di funzione di distribuzione di Gauss che stiamo considerando, i valori possono andare da $-\infty$ a $+\infty$, però la probabilità che assumano valori in intervalli molto lontani da a è molto piccola.
- La probabilità di ottenere un risultato che dista da a più di 3 deviazioni standard è circa 0.3%, per 4 deviazioni standard la probabilità è inferiore a 10^{-4} . La probabilità che due misure di a diano diverse deviazioni standard sarà piccola. Le misure si possono considerare, con alta probabilità, incompatibili.

Esistono test specifici per la compatibilità delle misure (“test di ipotesi”). Per ora ci basta quanto segue. Se $x_1 \pm \sigma_1$ e $x_2 \pm \sigma_2$ sono due misure indipendenti della stessa grandezza fisica, la loro differenza normalizzata alle deviazioni standard, non può essere molto diversa da zero.

Considereremo le due misure incompatibili se:

$$|x_1 - x_2| \leq 3\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

La giustificazione almeno in parte, sarà almeno in parte chiara dopo aver considerato le funzioni di variabili casuali.

Istogramma dei valori misurati

Siano state ripetute in condizioni identiche n volte le misure di una certa quantità con risultati dati dagli n valori x_i . Costruendo un istogramma con gli n valori x_i ottenuti, ci si aspetta che l'istogramma assuma una forma che ricordi la forma della funzione di Gauss. Il confronto può essere fatto in modo quantitativo:

- Se si conoscono i valori $\sigma_x = \sigma_a$ e $x = a$ possiamo calcolare la probabilità che un risultato cada nel generico intervallo k -esimo, centrato su x_k^* e di larghezza Δx . Tale probabilità vale:
$$p_k = \int_{x_k^* - \Delta x}^{x_k^* + \Delta x} f(x_k^*) dx = 2\Delta x f(x_k^*)$$
- Poiché il numero di eventi atteso segue con buona approssimazione una distribuzione binomiale, il numero di eventi previsto nell'intervallo k -esimo sarà pari a $n_k^c = np_k = 2n \Delta x f(x_k^*)$, con un'incertezza statistica $\sigma_{n_k} = \sqrt{np_k(1 - p_k)}$.
- Se il numero di misure è sufficientemente grande (maggiore di 10), il contenuto di probabilità associato alla deviazione standard è simile a quello che associamo alla distribuzione di Gauss.
- Posso ora confrontare il numero di eventi calcolato e misurato in ciascun intervallo, considerando la loro differenza in unità di deviazioni standard.

Misure ripetute, secondo approccio

Spesso è conveniente considerare gli n risultati x_i di uno stesso esperimento ripetuto n volte, come n variabili casuali indipendenti.

In base a quanto già visto, le x_i hanno tutte distribuzione gaussiana con stesso valore di aspettazione $\mu_x = a$ (si misura sempre la stessa grandezza fisica) e stessa varianza σ_x (le misure vengono tutte eseguite con stesso metodo e stessi strumenti). Si può quindi scrivere la funzione di distribuzione congiunta

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_x^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Che permette di calcolare la probabilità di ottenere nelle n misure i valori effettivamente ottenuti.

$$P(x_1^m - \Delta x \leq x_1 \leq x_1^m + \Delta x, \dots, x_n^m - \Delta x \leq x_n \leq x_n^m + \Delta x) = \frac{(\Delta x)^n}{(2\pi)^{n/2} \sigma_x^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Funzioni di più variabili casuali

Supponiamo ora che ci interessi una funzione $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dove le x_i sono n variabili casuali con funzione di distribuzione congiunta $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Per determinare la funzione di distribuzione di y , nel caso generale si introducono n variabili casuali

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Se esiste la funzione inversa $x_k = x_k(y_1, y_2, \dots, y_n)$ la funzione di distribuzione congiunta di y_1, \dots, y_n è data da

$$g(y_1, \dots, y_n) = f[x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, y_2, \dots, y_n)] \cdot \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right|$$

Dove

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

È lo Jacobiano della trasformazione. Naturalmente l'espressione diventa più complessa nel caso di funzioni a più valori. Integrando g su tutte le variabili $y_j \neq y_i$ si ottiene la funzione di distribuzione marginale di y . Spesso però questa procedura è difficile e, nel caso interessino solo valore di aspettazione e varianza di y si preferisce usare formule approssimate, come nel caso di funzioni di una variabile casuale.

Funzioni di più variabili casuali

Seguendo lo stesso procedimento di sviluppo in serie usato in quel caso, si può dimostrare che, con buona approssimazione, si ha

$$\mu_y = E[y] \cong y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$$

Per il valore d'aspettazione

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(x - \mu_{x_1})^{k_1} (x - \mu_{x_2})^{k_2} \dots (x - \mu_{x_n})^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left[\frac{\partial^{k_1 k_2 \dots k_n} y}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x}$$

$$\cong y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + (x - \mu_{x_1}) \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} + (x - \mu_{x_2}) \left[\frac{\partial y}{\partial x_2} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} + \dots + (x - \mu_{x_n}) \left[\frac{\partial y}{\partial x_n} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x}$$

$$+ \frac{1}{2} (x - \mu_{x_1})^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} + \frac{1}{2} (x - \mu_{x_2})^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_2} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} + \dots + \frac{1}{2} (x - \mu_{x_n})^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_n} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} + \dots$$

Funzioni di più variabili casuali

da cui:

$$\mu_y \cong y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \sigma_{x_k}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} cov(x_j, x_i)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} E[y^2] &\cong y^2(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{\partial y}{\partial x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \right)^2 \sigma_{x_k}^2 + y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \sigma_{x_k}^2 \\ &+ 2y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} cov(x_j, x_i) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[\frac{\partial y}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \left[\frac{\partial y}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} cov(x_j, x_i) + \dots \end{aligned}$$

La seconda espressione è la “legge di propagazione della varianza” nella sua formulazione generale.

Funzioni di più variabili casuali

Nel caso in cui le variabili siano indipendenti, i termini contenenti la covarianza sono nulli, e si ha:

$$\sigma_y^2 \cong \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{\partial y}{\partial x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Come caso particolare in cui $y = cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ si ottiene

$$\frac{\sigma_y^2}{y^2} = |\alpha_1|^2 \frac{\sigma_{x_1}^2}{x_1^2} + |\alpha_2|^2 \frac{\sigma_{x_2}^2}{x_2^2} + \dots + |\alpha_n|^2 \frac{\sigma_{x_n}^2}{x_n^2}$$

che è il corrispondente della legge di propagazione dell'errore massimo relativo.

Media aritmetica di più variabili casuali

Prendiamo

$$z = \sum_{i=1}^n x_i$$

dove le x_i hanno valore di aspettazione $E(x_i) = \mu_i$ e varianza σ_i^2 si ha

$$E[z] = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)$$

queste due relazioni sono valide in generale, qualsiasi siano le funzioni di distribuzione delle variabili x_i . Se poi le x_i hanno distribuzione gaussiana, si può dimostrare che z ha una distribuzione gaussiana, con valore di aspettazione e varianza dati dalle espressioni precedenti.

Media aritmetica di più variabili casuali

Consideriamo ora la variabile casuale media aritmetica di n variabili casuali x_i indipendenti

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

tutte con funzione di distribuzione $f(x_i)$, e quindi anche con stesso valore di aspettazione μ e stessa varianza σ^2 .

Per quanto visto è

$$\mu_{\bar{x}} = E[\bar{x}] = \frac{1}{n} E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \mu$$

e

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \text{var} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

La media aritmetica ha quindi una distribuzione centrata attorno al valore di aspettazione delle x_i . La sua varianza è invece n volte minore della varianza delle x_i : la media ha una dispersione più piccola attorno al valore centrale delle singole variabili x_i (il cosiddetto “campione”).

Media aritmetica di più variabili casuali

Si può dimostrare che se le variabili casuali x hanno funzione di distribuzione di Gauss, anche la funzione di distribuzione della media è la funzione di distribuzione di Gauss $N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}^2)$.

Un'applicazione immediata e importante si ha nel caso in cui le variabili x_i siano i risultati di n misure ripetute della stessa grandezza fisica.

La media ha proprietà notevoli. In particolare, vale il teorema del limite centrale:

- dato un campione di n variabili casuali con valore di aspettazione μ e varianza σ^2 , la media aritmetica del campione tende per $n \rightarrow \infty$ a una distribuzione gaussiana, con valore di aspettazione μ e varianza σ^2/n .
- Quindi, anche se le x_i hanno distribuzione uniforme, la loro media ha una distribuzione gaussiana se si considera un numero n sufficientemente elevato di variabili e, in pratica, basta che n sia maggiore di 10.

Stima dei parametri

È questo, assieme al “test d’ipotesi”, uno dei capitoli più importanti dell’ “inferenza statistica”, che ha lo scopo di ricavare informazioni sull’intera popolazione partendo da un campione finito di questa. La seguente trattazione del problema della stima dei parametri è trattata in modo molto sintetico, ai soli scopi del corso

La stima dei parametri consiste nel valutare quantitativamente, a partire da un certo numero di misure, i parametri che intervengono in un determinato fenomeno statistico (ad esempio stimare μ e σ della distribuzione di Gauss).

In generale, dato un “campione” di dimensione n (x_1, x_2, \dots, x_n) si tratta di identificare una funzione del campione (la “stima” o “stimatore”) il cui valore di aspettazione sia il valore del parametro che si vuole determinare (lo stimatore è una funzione del campione e quindi è una variabile casuale che su campioni diversi assume valori diversi ed ha una sua funzione di distribuzione).

Lo stimatore può essere identificato usando metodi diversi, a volte equivalenti. È desiderabile, comunque, che abbia alcune proprietà ben definite, tra cui

- usare in modo efficiente tutta l’informazione a disposizione (a varianza minima)
- essere centrato (valore di aspettazione uguale al valore vero del parametro) anche per campioni di dimensione limitata.

Metodo del Maximum Likelihood

Per n sufficientemente grande fornisce stime con funzione di distribuzione di Gauss, a varianza minima, e centrate

Consideriamo un “campione” costituito da n misure $(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$ di una variabile casuale x con funzione di distribuzione $f(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ e supponiamo di voler stimare i k parametri λ_j a partire dal campione.

Il metodo del Maximum Likelihood afferma che la stima migliore dei parametri è costituita da quei valori $\hat{\lambda}_j$ che massimizzano la funzione di Likelihood

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

dove $f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ è la funzione densità di probabilità congiunta dei risultati delle misure e dipende da k parametri. Queste funzione, se calcolata sul campione, è la funzione densità di probabilità dei parametri.

Scegliere i parametri in modo tale che \mathcal{L} sia massima significa quindi scegliere i valori dei parametri che massimizzano la probabilità di ottenere i valori misurati della grandezza fisica.

Metodo del Maximum Likelihood

In base a questo metodo, quindi, gli stimatori dei parametri sono quelle funzioni $\hat{\lambda}_j$ del campione tali che $\partial \mathcal{L} / \partial \lambda_i$ per $i = 1, k$.

Se \mathcal{L} è una funzione continua dei parametri la condizione necessaria e sufficiente affinché sia massima è che sia

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ per } i = 1, k$$

Queste k equazioni sono dette equazioni di Likelihood e gli stimatori dei parametri sono le soluzioni del sistema di k equazioni.

Esempio 1: stima dei parametri della distribuzione di misure

Supponiamo che le n variabili x_i siano i risultati di n operazioni di misura ripetute nelle stesse condizioni della stessa grandezza fisica di "valore vero" a . Se gli errori accidentali non sono trascurabili, ciascuna variabile casuale x_i ha funzione di distribuzione

$$f(x_i; a, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma_x^2}}$$

se le variabili x_i sono indipendenti, la funzione di distribuzione congiunta è

$$\mathcal{L} = f(x_1, x_2, \dots, x_n; a, \sigma_x^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$

e quindi

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_x^2 - \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$$

Gli stimatori di a e σ_x^2 sono le funzioni del campione tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial a} &= \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = 0 \Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_x^2} &= -\frac{n}{2\sigma_x^2} - \frac{1}{2(\sigma_x^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \end{aligned}$$

che sono le medie aritmetiche dei valori misurati e degli scarti al quadrato.

Esempio 1: stima dei parametri della distribuzione di misure

Si può verificare che la stima di a è centrata:

$$E[\hat{a}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i]$$

Per quanto riguarda invece $\hat{\sigma}_x^2$, nella sua espressione compare a , di cui si conosce solo la stima.. Sostituendo \hat{a} ad a ottengo

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a})^2$$

il cui valore di aspettazione è

$$E[\hat{\sigma}_x^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2$$

Ed è quindi centrato solo al tendere di $n \rightarrow \infty$, Per ottenere una stima centrata per n qualsiasi, è necessario moltiplicare l'espressione di $\hat{\sigma}_x^2$ per $n/(n-1)$ e si ottiene

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a})^2$$

Notare che il fattore $1/(n-1)$ fa sì che la stima non sia definita se $n = 1$, come ragionevole.

Esempio 1: stima dei parametri della distribuzione di misure

Date le n misure x_1, x_2, \dots, x_n , la miglior stima del valore di a è data quindi dal valor medio:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Le n misure sono distribuite con distribuzione Gaussiana intorno ad \hat{a} con la miglior stima della deviazione standard

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a})^2$$

Anche la variabile casuale \hat{a} segue una distribuzione Gaussiana. Possiamo calcolarla in modo semplice usando la legge di propagazione della varianza, vista in precedenza, considerando che le variabili x_i sono indipendenti:

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \text{var}(\hat{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial x_i} \right)^2 \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_x^2 = \frac{n}{n^2} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a})^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{a})^2$$

Il risultato della misura della grandezza A scriverà quindi come

$$A = \hat{a} \pm \sigma_{\hat{a}}$$

Con il significato che la probabilità che l'intervallo $(\hat{a} - \sigma_{\hat{a}}, \hat{a} + \sigma_{\hat{a}})$ contenga il valore vero di A è del 68%.

Esempio 2: media pesata

Supponiamo ora che la grandezza fisica sia stata misurata n volte con tecniche diverse. Le n variabili casuali x_i , risultati delle n misure, avranno quindi distribuzioni con stesso valore di aspettazione a (“valore vero” della grandezza fisica), ma varianze diverse, note. Le funzioni di distribuzione delle variabili x_i sono

$$f_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma_i^2}}$$

In questo caso, la funzione di Likelihood è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-a)^2}{2\sigma_i^2}}$$

Dobbiamo massimizzare il Likelihood per ottenere la miglior stima del valore di aspettazione e della varianza di a ; vale

$$\ln \mathcal{L} = \ln \left(\prod_{i=1}^n \sqrt{2\pi}\sigma_i \right) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}$$

Esempio 2: media pesata

La miglior stima di a si ottiene da:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial a} = - \frac{\partial \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma_i^2}}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - a}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} - a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

La varianza di \hat{a} può essere calcolata a partire dalla legge di propagazione della varianza

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \text{var}(\hat{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial x_i} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_i}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Queste sono le formule usate quando si vogliono combinare i risultati di diversi esperimenti. Naturalmente i risultati devono essere compatibili.

ESPERIENZE DI MECCANICA

Misura dell'accelerazione di gravità con pendolo semplice

Il pendolo semplice:

Si chiama **pendolo semplice** un punto materiale di massa m appeso tramite un filo inestensibile, di lunghezza l e massa trascurabile, ad un punto O . Dal momento in cui il pendolo viene spostato dalla sua verticale e quindi lasciato, esso inizierà un moto oscillatorio che, in caso di smorzamento trascurabile, proseguirà identico fino ad una nuova interazione con l'ambiente.

Volendo ricavare il periodo delle oscillazioni possiamo scrivere le equazioni di Newton per la massa in direzione centripeta e tangenziale:

$$\begin{cases} ma_c = T - mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta \end{cases}$$

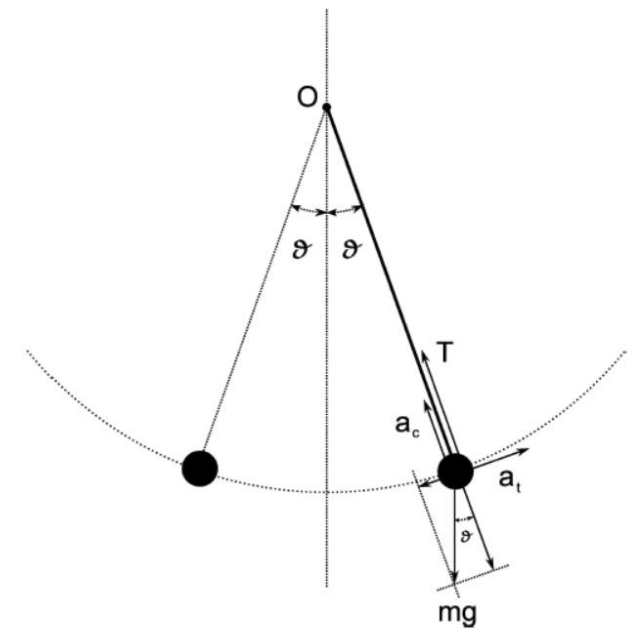
Notando che il moto è circolare, per l'accelerazione centripeta vale $a_c = l\dot{\theta}^2$, e per quella tangenziale $a_t = l\ddot{\theta}$

$$\begin{cases} ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

Per angoli piccoli (piccole oscillazioni) si ha $\sin \theta \cong \theta$ (per $\theta = 5^\circ$ vale $(\sin \theta - \theta)/\theta \sim 0.0013$) e la seconda equazione fornisce l'equazione del moto del pendolo:

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

formalmente identica all'equazione di un moto armonico.



Il pendolo semplice:

La soluzione dell'equazione differenziale può essere calcolata assumendo una generica soluzione $\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. L'integrale generale è:

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \phi\right)$$

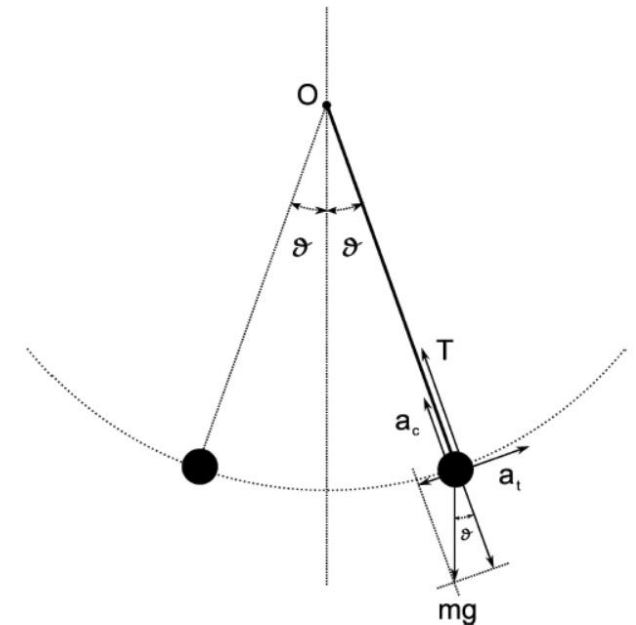
dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ e detta pulsazione del moto. Le costanti di integrazione (ampiezza massima e fase iniziale) si ottengono dalle costanti iniziali

$$\begin{cases} \theta(t = 0) = \theta_{max} \\ \dot{\theta}(t = 0) = 0 \end{cases}$$

Il periodo T delle (piccole) oscillazioni si ricava facilmente dalla pulsazione:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

e come si vede non dipende dalla massa m appesa, ma solamente dal campo gravitazionale g e dalla lunghezza l del filo (isocronismo delle oscillazioni).



Il pendolo fisico

Il pendolo semplice non è che un caso ideale di un oggetto fisico chiamato pendolo fisico e costituito da un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione O .

Siano M la massa del corpo rigido, I il momento d'inerzia rispetto al centro di rotazione O e d la distanza tra il centro di massa c_m ed il centro di rotazione O .

Scegliendo come polo il centro di rotazione O , l'unica forza da considerare è il peso Mg , che con il vincolo O risulta in un momento τ_z che tende a riportare il pendolo in posizione verticale:

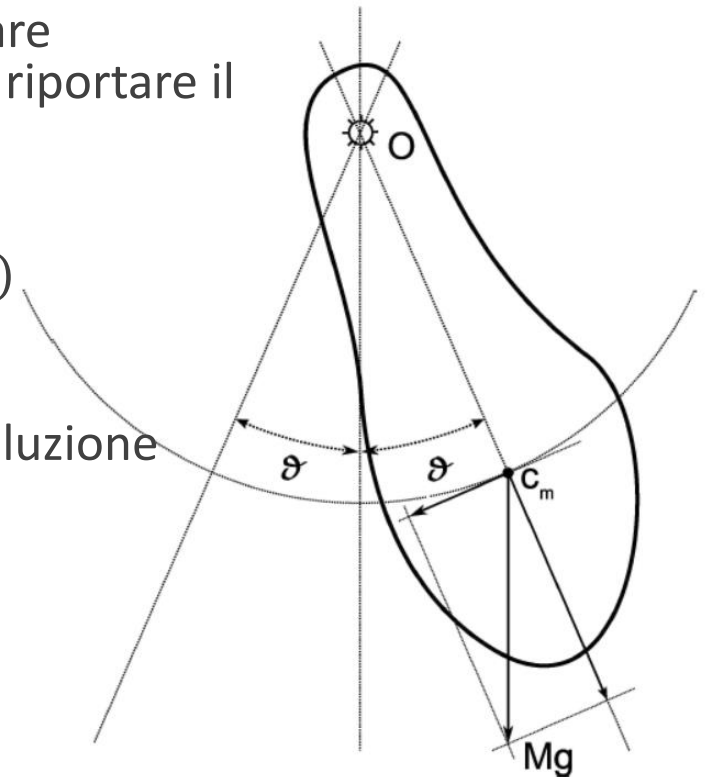
$$\tau_z = -Mgd \sin \theta$$

Scrivendo l'equazione di Newton per la dinamica rotazionale ($\sum \vec{\tau} = \vec{\alpha}I$) si ottiene:

$$-Mgd \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

che assumendo piccole oscillazioni si semplifica in $-Mgd \theta = I\ddot{\theta}$. La soluzione dell'equazione è

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin \left(\sqrt{\frac{Mdg}{I}} t + \phi \right)$$



Il pendolo fisico

Il periodo delle oscillazioni è quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mdg}}$$

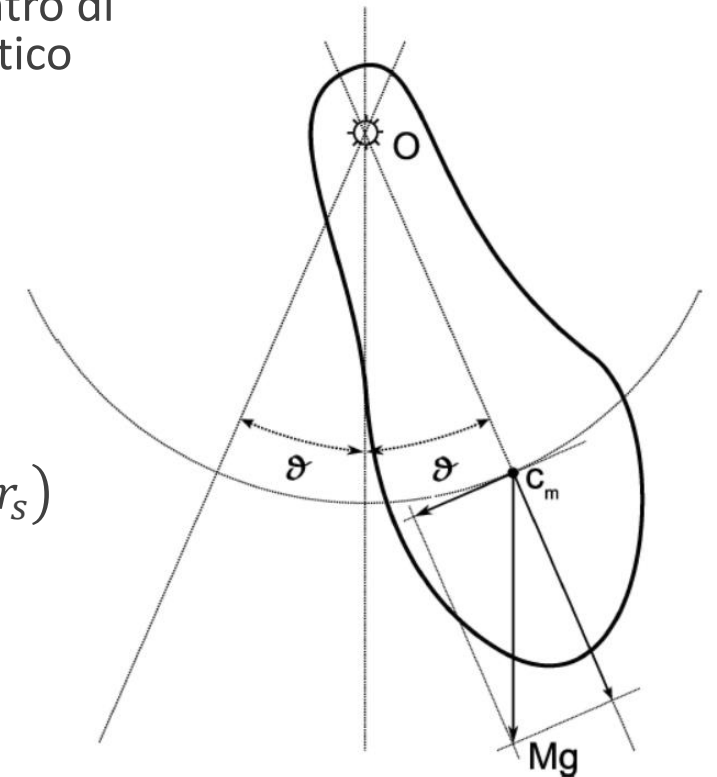
Si nota quindi che un pendolo fisico di massa M , momento d'inerzia I e centro di massa a distanza d dal punto di rotazione ha periodo delle oscillazioni identico ad un pendolo semplice di lunghezza $l = I/Md$.

Nel caso del nostro pendolo (filo+sfera), il momento d'inerzia rispetto ad O è dato dalla somma del momento d'inerzia del filo rispetto ad O e dal momento d'inerzia della sfera, rispetto ad O . Siano M_s ed M_f le masse di sfera e filo, r_s il raggio della sfera e l_f la lunghezza del filo; vale

$$I = \int_0^{l_f} \frac{M_f}{l_f} x dx + M_s(l_f + r_s)^2 = \frac{l_f}{2} M_f + M_s(l_f + r_s)^2$$

Ovvero

$$I = M_s(l_f + r_s)^2 \left(1 + \frac{l_f M_f}{2M_s(l_f + r_s)} \right)$$



Oltre le piccole oscillazioni

Ricaviamo ora brevemente alcuni risultati non considerando l'approssimazione di piccole oscillazioni.

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($\Delta K + \Delta U = E$) ed avendo scelto lo zero del potenziale alla quota di O posso scrivere:

$$\frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 0 = mgl(\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

Da cui

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_{max})} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}$$

Separando le variabili, l'equazione diventa

$$dt = \frac{T_0 d\theta}{2\pi \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}}$$

Oltre le piccole oscillazioni

Integrando su un quarto del periodo

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} = \frac{C}{2\pi} \mathfrak{F}$$

\mathfrak{F} è un integrale ellittico di prima specie e perciò non calcolabile in forma chiusa, ma approssimabile numericamente o tramite sviluppo in serie.

Una buona approssimazione è $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{max}}{16}\right)$ che ammette un errore relativo massimo di una parte su 300 000 per angoli di ampiezza massima pari a 10° (il termine successivo nell'espansione è $\frac{11}{3072} \theta_{max}^4$).

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

L'integrale $\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}}$ può essere riscritto, usando le formule di bisezione per il coseno $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, nella forma:

$$\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}}}$$

Posso ora fare un'ulteriore sostituzione di variabile, $\sin \psi = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_{max}}{2}$. Gli estremi di integrazione diventano
 $\theta = 0 \Rightarrow \sin \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$

$$\theta = \theta_{max} \Rightarrow \sin \psi = 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$$

Inoltre:

$$d \sin \psi = \cos \psi d\psi = d \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_{max}}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{\sin \frac{\theta_{max}}{2} \cos \psi}{\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\psi$$

Sostituendo la variabile nell'integrale ho ...

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Sostituendo la variabile nell'integrale ho ...

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} &= \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \frac{\theta_{max}}{2}}{\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \psi} \sqrt{1 - \sin^2 \psi}} d\psi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \psi} (1 - \sin^2 \psi)}} d\psi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\psi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\psi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} \sin^2 \psi}} d\psi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi
 \end{aligned}$$

Con $k = \sin \frac{\theta_{max}}{2}$. Possiamo usare lo sviluppo in serie binomiale $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ per scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{1}{2} (k^2 \sin^2 \psi) + \frac{3}{8} (k^2 \sin^2 \psi)^2 + \dots$$

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Da cui ho ...

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} (k^2 \sin^2 \psi) + \frac{3}{8} (k^2 \sin^2 \psi)^2 + \dots \right) d\psi \\ &= \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi + \frac{T_0}{2\pi} \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi + \frac{T_0}{2\pi} \frac{3k^4}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \psi d\psi + \dots \\ &= \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{2\pi} \frac{k^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi + \dots = \frac{T_0}{4} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{8} k^4 + \dots \right) \\ &= \frac{T_0}{4} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{m=1}^n (2m-1)}{\prod_{k=1}^n (2m)} k^{2n} \right)\end{aligned}$$

Con, come scritto prima, $k = \sin \frac{\theta_{max}}{2}$

Misura dell'accelerazione di gravità

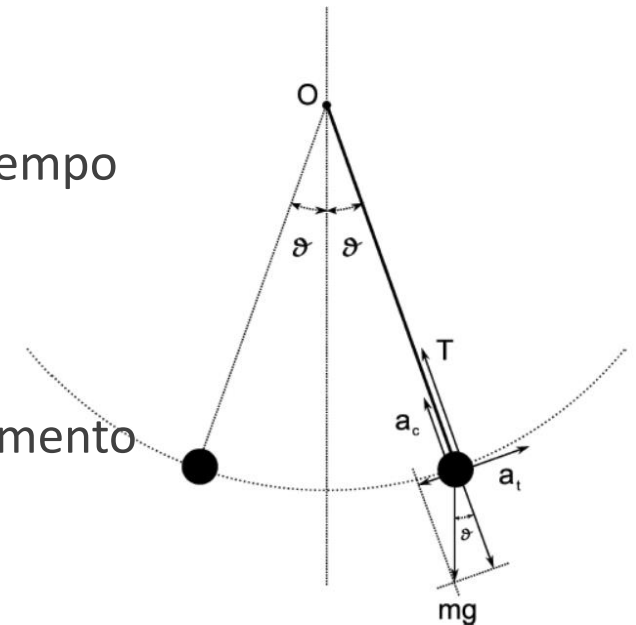
Dalla misura del periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, nota la distanza del punto materiale dall'asse di oscillazione, possiamo ricavare g

$$g = 2\pi \frac{l}{T^2}$$

- Il periodo T è misurato con un cronometro digitale. La sensibilità del cronometro è del millisecondo, ma la misura è dominata dagli errori casuali.
- La distanza l del punto materiale dall'asse di oscillazione è data da $l = l_f + r_s$ nell'ipotesi di una massa del filo nulla.
 - l_f è misurato con il metro a nastro.
 - $r_s = d_s/2$ si misura con il calibro Palmer
- Poiché la deviazione standard sulle misure di tempo non dipende dal tempo invece di misurare il singolo periodo si misurano 4 ÷ 5 periodi $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$. Per la legge di propagazione della varianza

$$\sigma_T^2 = \frac{\sigma_\tau^2}{25}$$

- Per una misura più precisa dell'intervallo di tempo, usiamo come riferimento il passaggio sull'asse verticale (velocità dell'oscillazione massima)



Misura della dipendenza di T da l

Misurare il periodo T per una lunghezza variabile del filo/raggio sfera da 150 a 30 cm (150, 120, 100, 60 e 30) con quindi lunghezze all'incirca di questi valori (non è necessario avere valori esatti perché comunque saranno poi misurati).

Partiamo da valori alti a decrescere perché i periodi saranno più lunghi (facili da misurare) rispetto alle oscillazioni più rapide a lunghezze piccole.

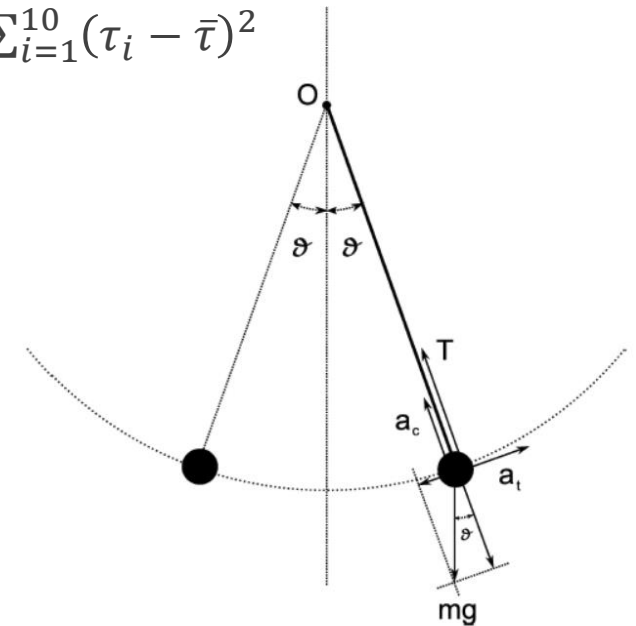
I periodi attesi, per un valore dell'accelerazione di gravità di 9.807 m/s^2 sono:

l (m)	T (s)
0.30	1.10
0.60	1.55
1.00	2.01
1.20	2.20
1.50	2.46

Misura di τ

Misurare $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$ per ogni lunghezza l .

- Misurare $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$ per almeno 10 volte (slide 74).
- Fare un istogramma con le 10 misure
- Per la trattazione statistica che abbiamo visto i risultati seguono una distribuzione Gaussiana.
 - La miglior stima del valore vero di τ è il valor medio $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{10} \tau_i$
 - La miglior stima della varianza della singola misura τ_i è data da $\sigma_{\tau_i}^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (\tau_i - \bar{\tau})^2$
 - La miglior stima della varianza della media è data da $\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \frac{\sigma_{\tau_i}^2}{10}$
 - Abbiamo quindi $\bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}}$.
 - Tenuto conto che $\bar{T} = \bar{\tau}/5$ e che $\sigma_{\bar{T}} = \sigma_{\bar{\tau}}/5$ abbiamo anche misurato $\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}}$



Misura della dipendenza di T da l

- Utilizzando le opportune trasformazioni di variabili per rendere il problema lineare, verificare graficamente l'accordo dei dati con le possibili relazioni $T = al^2, T = al, T = al^{1/2}, T = al^{3/2}$.
- Assumendo che $T = al^{1/2}$ sia la relazione in miglior accordo con i dati, stimare il parametro a con il metodo grafico e verificare la compatibilità dei valori misurati con questa ipotesi.
- Fare un grafico dei risultati in carta log-log e misurare la pendenza della retta.

Rappresentazione grafica

La scelta del **fattore di scala** per le unità di misura delle ascisse e delle ordinate deve essere fatta in modo da ottenere una rappresentazione grafica **chiara e di facile interpretazione**

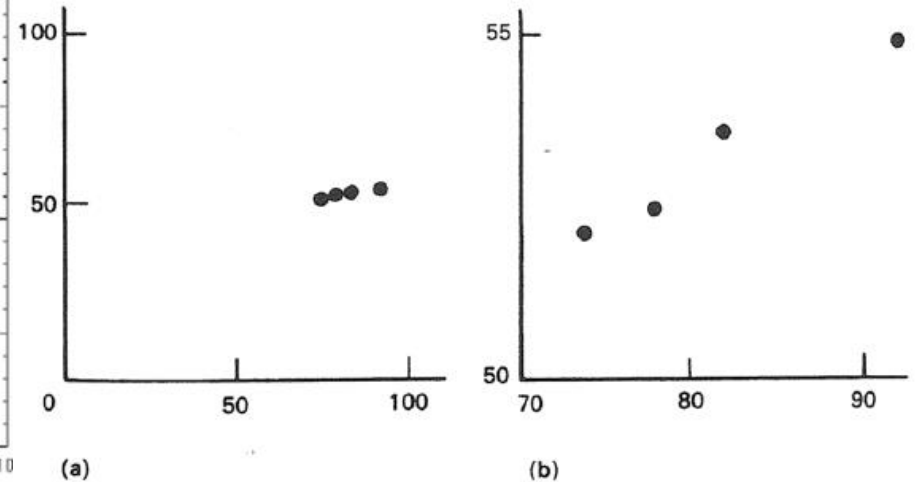
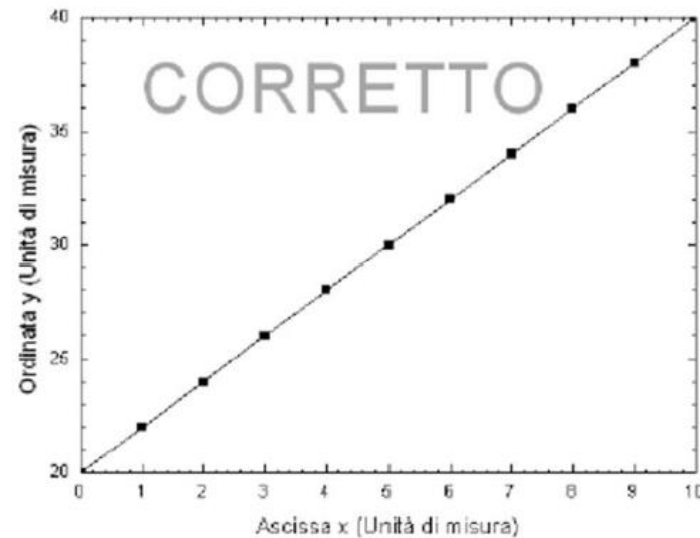
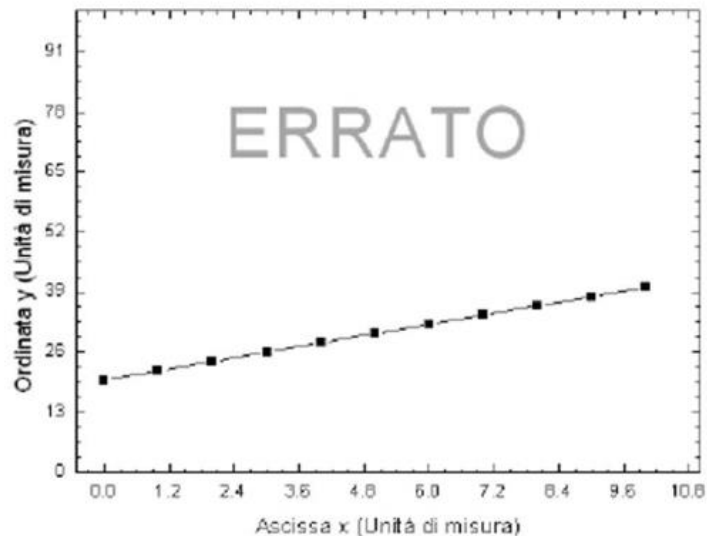


Fig. 11.4. (a) is not a very useful graph. The same results are plotted on an expanded scale in (b).

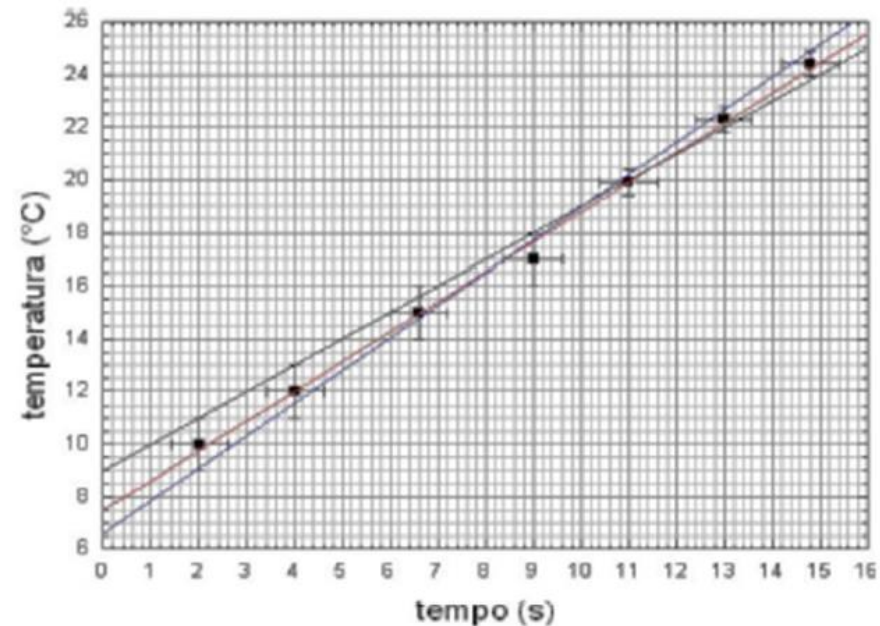
Asse orizzontale: **CAUSA**

Asse verticale: **EFFETTO**

Relazione tra grandezze: Metodo grafico

Per trovare le relazioni tra grandezze misurate usiamo il metodo grafico:

- Usiamo il grafico con scale adatte per avere relazioni lineari;
- Tracciamo i valori misurati con associati gli errori massimi
- Tracciamo la retta che visivamente interpola meglio i punti, e le due 2 rette, ancora in accordo con i punti ma con rispettivamente le pendenze massime e minime



Uso della scala Log-Log

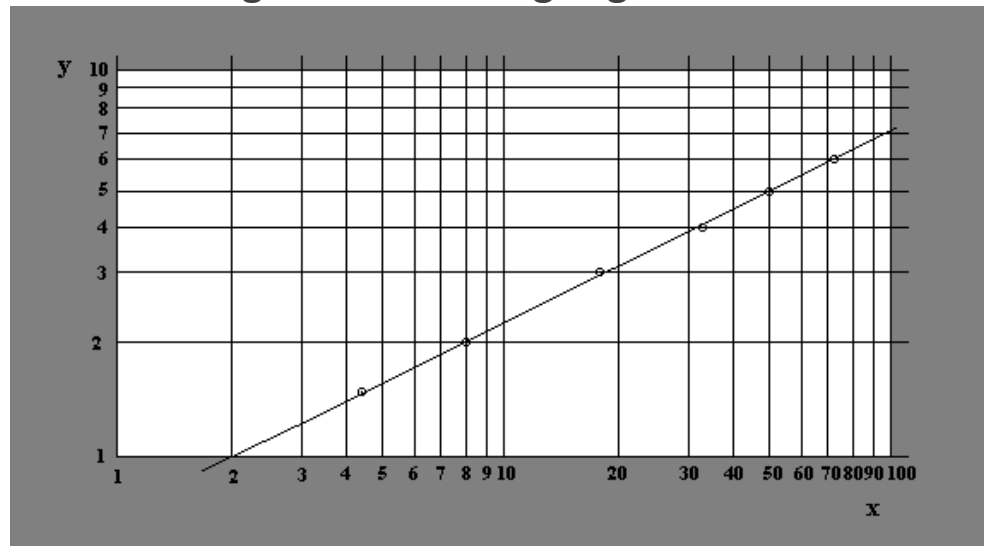
Nel caso in cui abbiamo una relazione tra le variabili di tipo:

$$y = \alpha x^\beta$$

E' interessante usare i grafici con carte millimetriche in scala logaritmica su entrambi i lati. In questi grafici la distanza tra due tacche non è lineare ma proporzionale alla differenza dei logaritmi (tra 2 e 3 la distanza è proporzionale a $\Delta_{3-2} \propto \log 3 - \log 2$, e questa distanza è riscalata ad ogni potenza di 10, ovvero a $\Delta_{30-20} = \Delta_{30-20}$ ecc.). Infatti se prendiamo i logaritmi vediamo che vale:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x$$

Abbiamo cioè una dipendenza grafica lineare da β di $\log y$. Invece di calcolare i logaritmi usiamo carte millimetriche con le succitate distanze logaritmiche o log-log



Uso della scala semilogaritmica

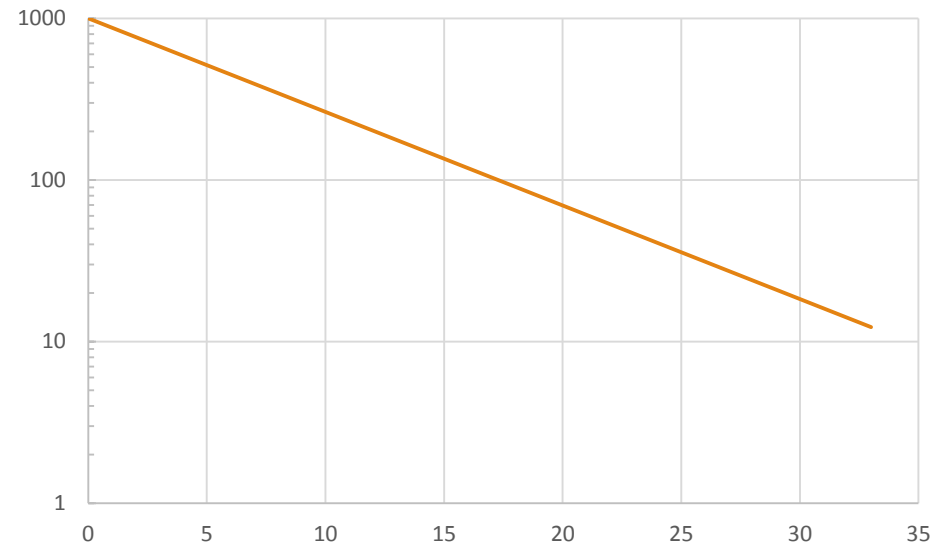
Nel caso in cui abbiamo una relazione tra le variabili di tipo:

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

E' interessante usare i grafici con carte millimetriche in semilogaritmica, in cui l'asse orizzontale ha una separazione tra le tacche lineare, mentre quello verticale ha una separazione logaritmica. Infatti se prendiamo il logaritmo y che vale:

$$\log y = \log \alpha + \beta x \log e$$

Abbiamo cioè una dipendenza grafica lineare da β e x di $\log y$. Invece di calcolare i logaritmi usiamo carte millimetriche con le succitate distanze logaritmiche sulle ordinate



Misura di g

Per ognuna delle diverse lunghezze l_1, \dots, l_k calcolare il valore di g :

$$g_{l_j} = 2\pi \frac{l_j}{T_{l_j}^2}$$

E la corrispondente varianza. Nell'ipotesi che l'errore dominante sia quello sul periodo, trasformiamo l'errore sulla lunghezza da massimo a deviazione standard: $\sigma_{l_i} = \Delta l_i / \sqrt{3}$.

Abbiamo quindi:

$$\frac{\sigma_{g_{l_j}}^2}{g_{l_j}^2} = 4 \frac{\sigma_{T_{l_j}}^2}{T_{l_j}^2} + \frac{\sigma_{l_j}^2}{l_j^2}$$

Per ognuna delle lunghezze l_1, \dots, l_k .

Fare un grafico di g in funzione di l e valutare la compatibilità delle misure e l'eventuale esistenza di un trend non compatibile con $g = \text{const}$.

Valore finale (ed errore corrispondente) di g come media pesata delle g_{l_i} (perché?)

PER LA LUNGHEZZA DEL FILO AD UN METRO PRENDERE 100 MISURE

Confronto Istogramma-Gaussiana

Con le 100 misure del periodo del pendolo a 1 m, possiamo fare un confronto tra l'istogramma e la distribuzione Gaussiana.

Abbiamo visto che in caso di distribuzione Gaussiana, il Maximum Likelihood fornisce come miglior stima dei parametri μ e σ della funzione di distribuzione di Gauss:

$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

i valori $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}$. Possiamo confrontare la distribuzione così ottenuta con il nostro istogramma della distribuzione delle misure.

Il numero di eventi contati n_k^m nel k-esimo intervallo di larghezza Δx deve essere confrontato con il numero di eventi atteso nello stesso intervallo a partire dalla funzione di distribuzione di Gauss; dato il valore della funzione nel centro dell'intervallo x_k , $f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} e^{-\frac{(x-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}}$, la probabilità che un evento cada in quell'intervallo è:

$$P_k = P\left(x_k - \frac{\Delta x}{2} < x < x_k + \frac{\Delta x}{2}\right) = \Delta x f(x_k)$$

Il numero di eventi negli intervalli segue una distribuzione binomiale (P_k è la probabilità che l'evento cada nell'intervallo, $1 - P_k$ che cada fuori). Il numero di eventi atteso è $n_k^c = n_{tot} \Delta x f(x_k)$.

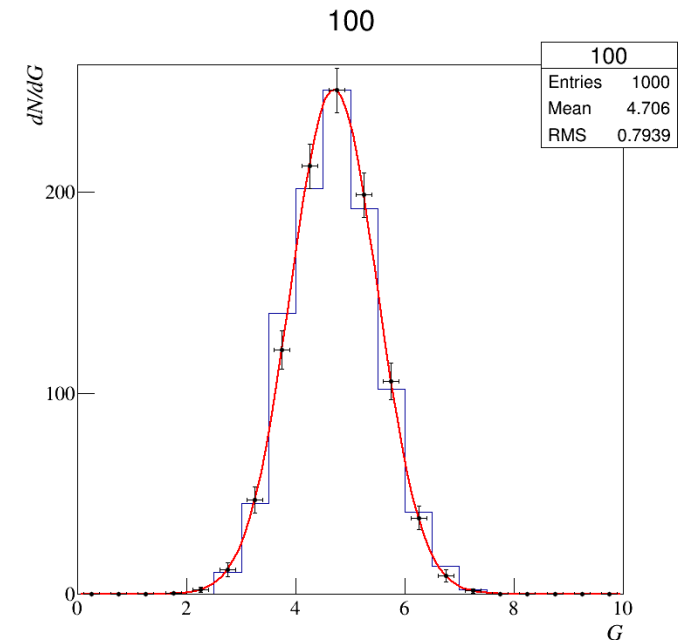
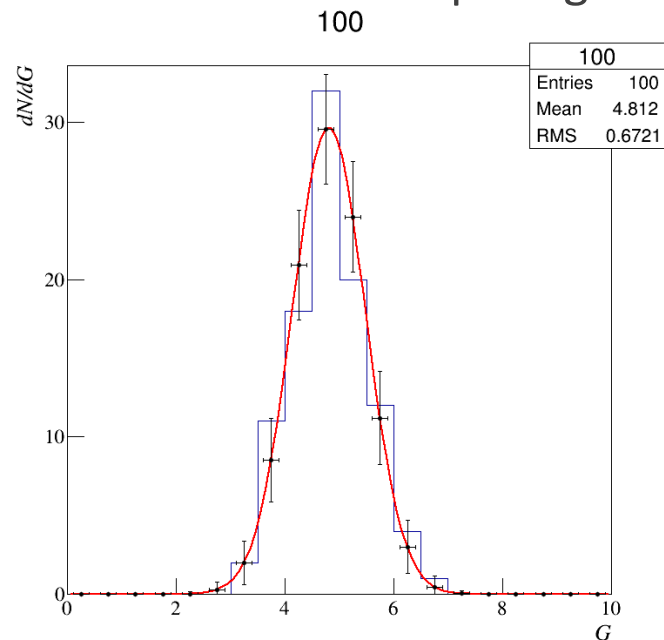
Confronto Istogramma-Gaussiana

La distribuzione del numero di eventi in ogni bin segue la distribuzione binomiale dove P_k è la probabilità che l'evento cada nell'intervallo k-esimo ed $q_k = 1 - P_k$ la probabilità che l'evento non cada nell'intervallo. La deviazione standard della binomiale è

$$\sigma_{n_k} = \sqrt{n_{tot} P_k (1 - P_k)} = \sqrt{n_k^c (1 - n_k^c / n_{tot})} \left(\approx \sqrt{n_k^c} \text{ per } n_{tot} \gg n_k^c \right)$$

Posso quindi confrontare il numero di eventi atteso, ed il numero di eventi effettivamente contato e vedere se per ogni intervallo dell'istogramma vale:

$$|n_k^m - n_k^c| < 3\sigma_{n_k}$$



Misura dell'accelerazione gravitazionale

Dati due corpi di massa m_1 ed m_2 la legge della gravitazione universale di Newton dice che la forza di attrazione tra le due masse è diretta lungo la congiungente e pari a:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Data la costante di gravitazione universale $G = 6.6738(8) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, la massa della terra $M_{\oplus} = 5.9726(7) \times 10^{24} \text{ kg}$ ed il suo raggio medio all'equatore di $R_{\oplus} = 6.378137 \times 10^6 \text{ m}$, posso calcolare la forza che la terra applica sulla sua superficie su una massa m

$$\vec{F} = m\vec{g} = m \left(G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \hat{r} \right)$$

Che fornisce un valore di $g = 9.799 \text{ m s}^{-2}$.

L'effettiva accelerazione che la Terra produce su un corpo in caduta varia al variare del luogo in cui questa è misurata. In particolare dipende della latitudine e dell'altitudine

Per questo motivo è stato introdotto un valore convenzionale per $g_0 = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$. Si tratta di un valore medio che approssima il valore dell'accelerazione di gravità presente al livello del mare a una latitudine di $45,5^\circ$.

Dipendenza dall'altezza (caso $h > 0$)

Dato che $g(r) = GM_{\oplus} \frac{1}{r^2}$ ho che la variazione con r è in prima approssimazione:

$$\frac{\Delta g}{g} \approx -2 \frac{\Delta r}{r}$$

Salendo a mille metri d'altezza la variazione è quindi pari a $\Delta g/g \approx -2000/6.378137 \times 10^6 = 3.1 \times 10^{-4}$, ovvero di circa 3 parti su 10000, e $\Delta g = -3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$.

La forma non perfettamente sferica **della terra, schiacciata ai poli** con una diminuzione del raggio di circa **21 km**, comporta un aumento dell'accelerazione di gravità ai poli, rispetto all'equatore di 1/304.

$$\Delta g_P \approx 2g_E \frac{\Delta r}{r} = 2 \cdot \frac{9.799}{304} = 0.064 \text{ m s}^{-2} \quad \text{o} \quad g_P = 9.863 \text{ m s}^{-2}$$

Effetto dell'accelerazione centripeta

La terra compie una rotazione completa sul suo asse in 24 h. La velocità angolare è quindi pari a

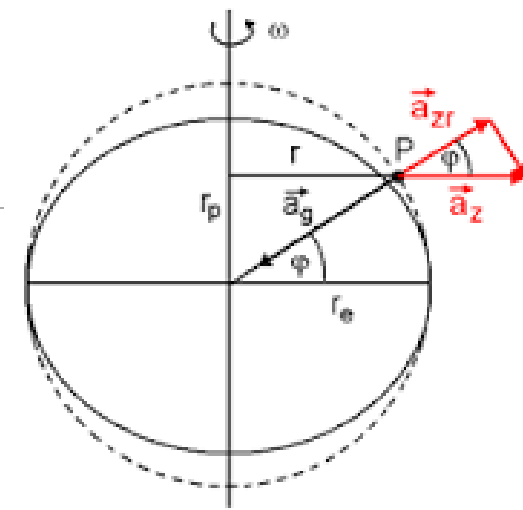
$$\omega_c = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 5.27 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-2}$$

L'accelerazione centripeta è data da $a_c = \omega_c^2 r$, che ai poli vale $a_c = \omega_c^2 R_\oplus = 0.018 \text{ m s}^{-2}$. Ai poli l'accelerazione centripeta è diretta nella stessa direzione ed in verso opposto a g , per un'accelerazione di gravità apparente pari a $g_E^a = g - \omega_c^2 R_\oplus = 9.799 - 0.019 = 9.780 \text{ m s}^{-2}$.

Alla latitudine φ , nell'approssimazione sferica, il raggio è $R(\varphi) = R_\oplus \cos \varphi$, inoltre solo la componente di a_c lungo g ha un effetto sulla accelerazione di gravità apparente, questa proiezione comporta un secondo fattore $\cos \varphi$ per cui $a_c^{\parallel}(\varphi) = \omega_c^2 R_\oplus \cos^2 \varphi = \omega_c^2 R_\oplus (1 - \sin^2 \varphi)$.

Alla latitudine di Trieste ($45^\circ 38' 10''$) $\varphi = 45 + (38/60) + (10/3600) = 45.6361^\circ = 0.7965 \text{ rad}$, per cui $a_c^{\parallel} = 0.009 \Rightarrow 9.799 - 0.009 = 9.790 \text{ m s}^{-2}$

$$g_\varphi^a = g - \omega_c^2 R_\oplus + \omega_c^2 R_\oplus \sin^2 \varphi = g_E^a \left(1 + \frac{\omega_c^2 R_\oplus}{g_E^a} \sin^2 \varphi \right)$$



Dipendenza dalla Latitudine

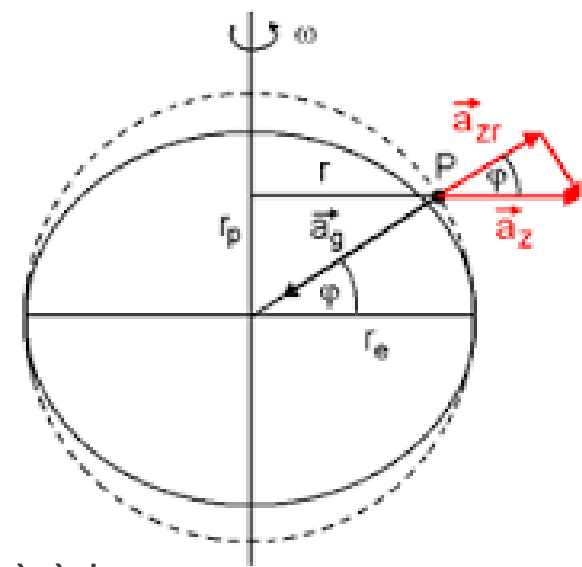
Tenendo conto sia:

- dell'accelerazione centripeta in funzione della latitudine
- della variazione del raggio terrestre medio in funzione della latitudine
- dell'altezza nel punto in cui g viene misurata

Una formula che approssima bene il valore 'medio' dell'accelerazione di gravità è la seguente:

$$g(\varphi, h) = 9.780(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\varphi) - 3.086 \times 10^{-6}h \quad m s^{-2}.$$

Il valore che tale formula fornisce per Trieste ($45^\circ 38' 10''$) è di $g = 9.807 m s^{-2}$.



Misura dei moduli di Young e Coulomb dell'acciaio

Deformazioni elastiche

Questa coppia di esperienze è finalizzata allo studio delle **proprietà elastiche dei materiali sottoposti a sforzi di trazione o di taglio**. A tale scopo faremo uso di due apparati sperimentali denominati estensimetro e torsionometro,

Con il termine di **corpo rigido** si indica un solido indeformabile, ossia un oggetto che mantiene la propria forma e volume sotto l'azione di qualsiasi sollecitazione. **La nozione di corpo rigido è un'astrazione**.

Tutti i solidi, se sottoposti a sollecitazioni quali trazione, compressione, torsione, scorrimento, si deformano.

Se le sollecitazioni sono intense le deformazioni possono essere permanenti e si può anche arrivare al **cedimento strutturale** (rottura) del materiale.

Deformazioni elastiche

Una deformazione è detta **elastica** se il corpo torna allo **stato originario** quando vengono meno **le forze che ne hanno causato la deformazione**.

La deformazione è **elastica** se le forze applicate sono inferiori ad un limite che dipende dal materiale, dalla temperatura, dal tipo di deformazione considerata, etc.

Per le deformazioni elastiche si osserva una relazione di **proporzionalità tra sollecitazione e deformazione**.

$$\Delta L \propto F$$

Questo comportamento è noto come **legge di Hooke**.

La **legge di Hooke** è valida per la maggior parte dei minerali, per il vetro, per i materiali ceramici e per i metalli. Per i metalli duttili è vera per carichi modesti.

Allungamenti per trazione

La costante elastica k dipende dal **materiale**, dalla **temperatura** e dalle **caratteristiche geometriche del solido**, ovvero dalla sua lunghezza lungo la direzione di trazione e dalla sezione trasversa rispetto a tale direzione.

$$k(\text{materiale}, T, S, L)$$

Si osserva in particolare che, a parità di lunghezza, la costante elastica di un materiale cresce in **modo proporzionale alla superficie**; raddoppiando cioè la superficie del materiale la costante elastica raddoppia. Per avere lo stesso allungamento devo quindi raddoppiare la forza applicata.

$$k(S, L) \propto S$$

Si osserva anche che, a parità di superficie, la costante elastica decresce in modo inversamente proporzionale all'allungamento; raddoppiando la lunghezza del filo la costante elastica si dimezza. Per avere lo stesso allungamento devo quindi dimezzare la

$$k(S, L) \propto \frac{1}{l}$$

Allungamento per trazione

Possiamo esplicitare queste dipendenze in modo esplicito nello scrivere la costante elastica k

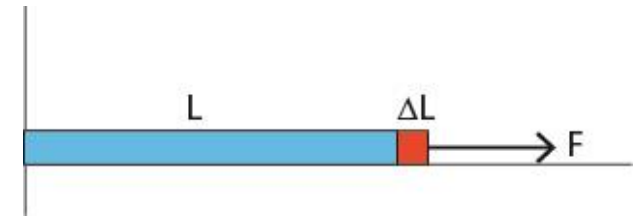
$$F = k(S, L)\Delta L$$

E scrivere

$$\sigma S = k(S, L)L \varepsilon$$

Ovvero

$$\sigma = \frac{k(S, L)L}{S} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = E_M(T)\varepsilon$$

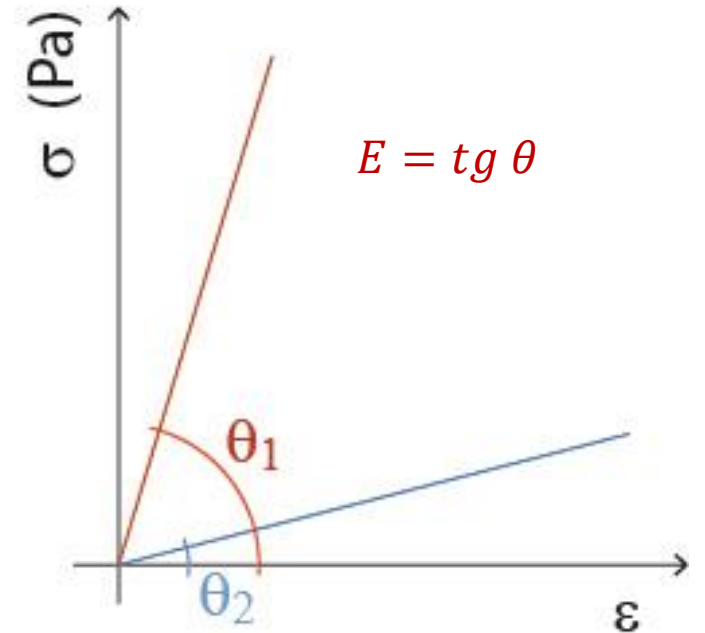


Dove $E_M(T) = \frac{k(S, L)L}{S}$, misurato in $(N m^{-2})$, ovvero in Pascal, è il **Modulo di Young** del materiale, che non dipende dalle caratteristiche geometriche ma solo dalla temperature.

Rappresentazione grafica legge di Hooke

Il corpo rigido è rappresentato da una retta verticale (modulo di Young ∞)

Materiale	E (Pa) @ 300 K	E (Pa) @ 800 K
Acciaio	2.1×10^{11}	
Alluminio	0.7×10^{11}	0.5×10^{11}
Ferro	2.0×10^{11}	1.5×10^{11}
Rame	1.1×10^{11}	
Vetro	0.7×10^{11}	
Calcestruzzo	2.3×10^{10}	
Granito	2.5×10^{10}	



Esempio numerico

Un filo di alluminio con un diametro $d = 2\text{ mm}$ ed una lunghezza $l = 2.0\text{ m}$ si allunga di 1.08 mm quando è sottoposto ad una trazione di 120 N

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{\pi \times 10^{-6}} = 3.82 \times 10^7 \text{ Pa} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{3.82 \times 10^7}{0.7 \times 10^{11}} = 0.54 \times 10^{-3}$$

Ovvero $\Delta L = \varepsilon L = 0.54 \times 10^{-3} \times 2.0 = 1.08 \times 10^{-3} \text{ m}$

Energia potenziale elastica

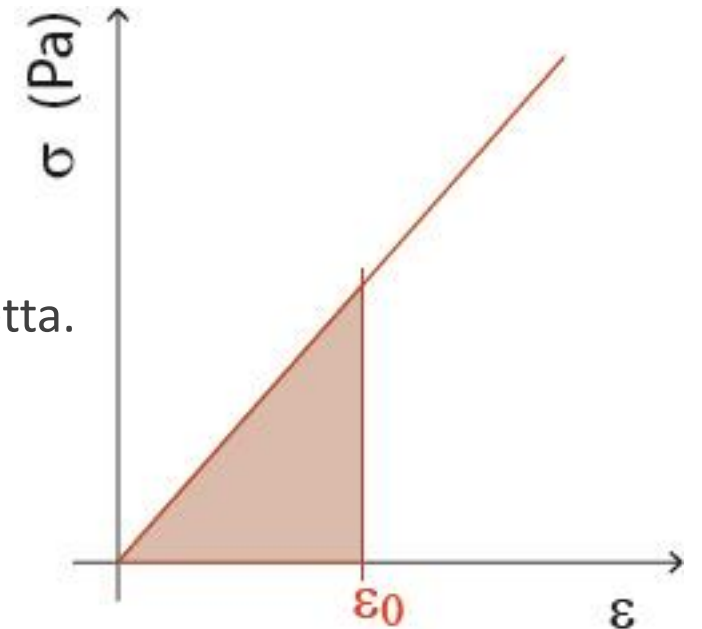
Il lavoro che devo compiere per fare allungare una barretta di lunghezza l di dx è pari a $dL = Fdx$; per unità di volume della mia ho quindi:

$$\frac{dL}{V} = d\mathcal{U} = \frac{F}{V} dx$$

Ma, come abbiamo visto, $\sigma = \frac{F}{S} = E\varepsilon$ e $d\varepsilon = \frac{dx}{l}$ da cui

$$\mathcal{U} = \int_0^{\Delta l} \frac{F}{V} dx = E \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon_0^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_0$$

che rappresenta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella barretta.



Legge di Poisson

Se un corpo è soggetto ad una trazione, oltre ad una elongazione nella direzione di azione della forza, si osserva una riduzione delle dimensioni trasverse (viceversa nel caso di compressione).

Se si considera un cilindro di lunghezza L e raggio r , si osserva, nei limiti di elasticità del materiale che:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \quad \text{dove } \nu \text{ – Coefficiente di Poisson}$$

Per volumi costanti:

$$\Delta[(\pi r^2)L] = 0 \implies 2\pi r \Delta r L = -2\pi r^2 \Delta L \implies \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$$

Ovvero $\nu = 0.5$. Sperimentalmente $\nu \leq 0.5$, con $\nu = 0.5$ per materiali perfettamente elastici quale il caucciù.

Materiale	ν	Materiale	ν
Vetro	0.25	Rame	0.34
Ferro	0.30	Piombo	0.40
Acciaio	0.30	Caucciù	0.50

Sforzi da dilatazione termica

Un materiale non vincolato subisce una dilatazione (compressione) termica al crescere (decrescere) della temperatura.

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T$$

Con il coefficiente di dilatazione termica α (misurato in K^{-1}) è caratteristica del materiale. Lo sforzo che tale materiale è in grado di esercitare, se soggetto a vincolo, è pari a:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L} = E\alpha\Delta T$$

Per l'acciaio, ciò corrisponde ad uno sforzo pari a $\sigma = 2.1 \times 10^{11} \cdot 1.2 \times 10^{-5} = 2.3 \text{ MPa/K}$

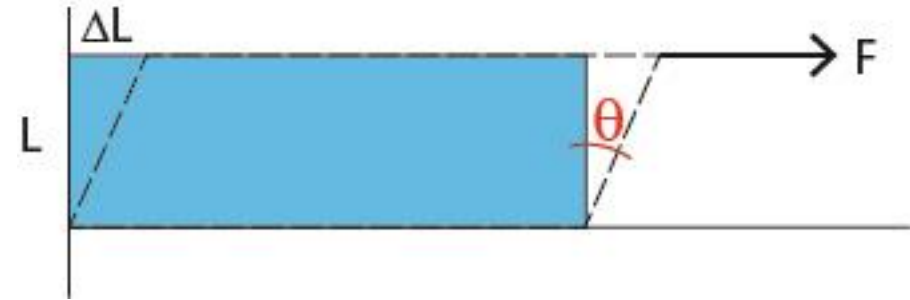
Materiale	α	Materiale	α
Vetro	9×10^{-6}	Rame	17×10^{-6}
Ferro	12×10^{-6}	Alluminio	23×10^{-6}
Acciaio	12×10^{-6}	Piombo	29×10^{-6}

Scorrimento

Se una forza è applicata parallelamente ad una superficie di un corpo, si parla di sollecitazione di taglio.

Il rapporto tra il modulo della forza e l'area della superficie sulla quale la forza agisce, prende il nome di sforzo di taglio.

Uno sforzo di taglio tende a provocare una deformazione per scorrimento.



Nei limiti di elasticità del materiale, la legge di Hooke per sforzi di taglio prende la forma di

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} = G \theta$$

Dove G è il **modulo di rigidità o di taglio**. G è legato al modulo di Young del materiale da

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Materiale	G (Pa)	Materiale	G (Pa)
Vetro	$25 \div 32 \times 10^9$	Rame	40×10^9
Ferro	80×10^9	Alluminio	25×10^9
Acciaio	85×10^9	Piombo	34×10^9

Esempio numerico

Vogliamo provocare uno scorrimento di $\Delta L = 1 \mu m$, su una barra alta $L = 2 \text{ cm}$ di alluminio, e con una superficie pari a 20 cm^2 e dobbiamo quindi calcolare la forza che dobbiamo esercitare

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} = 25 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{2 \times 10^{-2}} = 12.5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Ovvero $F = \sigma S = 12.5 \times 10^5 \cdot 2 \times 10^{-3} = 2500 \text{ N}$

Torsione

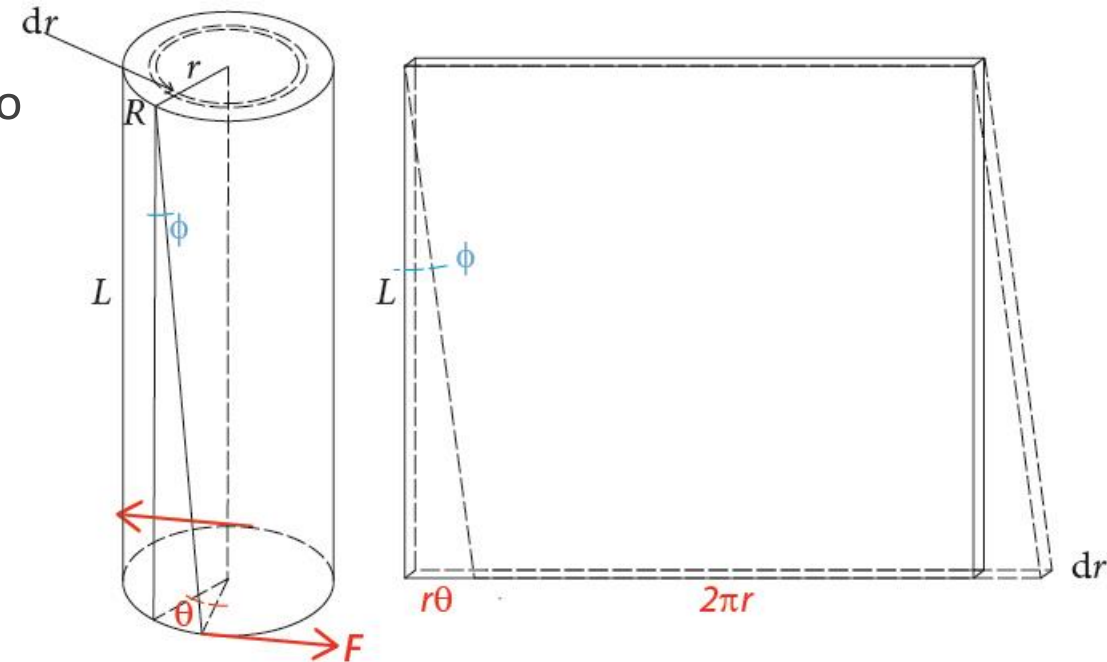
Se si considera un cilindro, e si applica un momento torcente ad una base, mentre l'altra è mantenuta vincolata, si ha una deformazione per torsione. Se il momento è modesto, il cilindro torna nella posizione iniziale una volta che la sollecitazione cessa.

Per effetto della torsione, la base ruota di un angolo θ . Nei limiti di elasticità Hookiana del materiale si osserva proporzionalità tra il momento applicato M e l'angolo di rotazione θ

$$M = k\theta$$

Dove la costante di proporzionalità k è legata al modulo di rigidità del materiale e alle sue caratteristiche Geometriche. La torsione è apprezzabile se R è piccolo ed L è grande, ossia per oggetti filiformi.

Per calcolare la relazione tra M e θ nell'ipotesi di filo cilindrico, immaginiamo di sviluppare la corona circolare come un parallelepipedo di altezza L , base $2\pi r$ e spessore dr .



Torsione

Si consideri una corona cilindrica di raggio $r \leq R$ e spessore dr : se si immagina di sviluppare questa corona su di un piano si ottiene un rettangolo con dimensioni $2\pi r \times dr \times L$. Per effetto della torsione, una base (quella inferiore nella figura) scorre di una quantità $r\theta$ rispetto all'altra. Lo sforzo applicato è pari a:

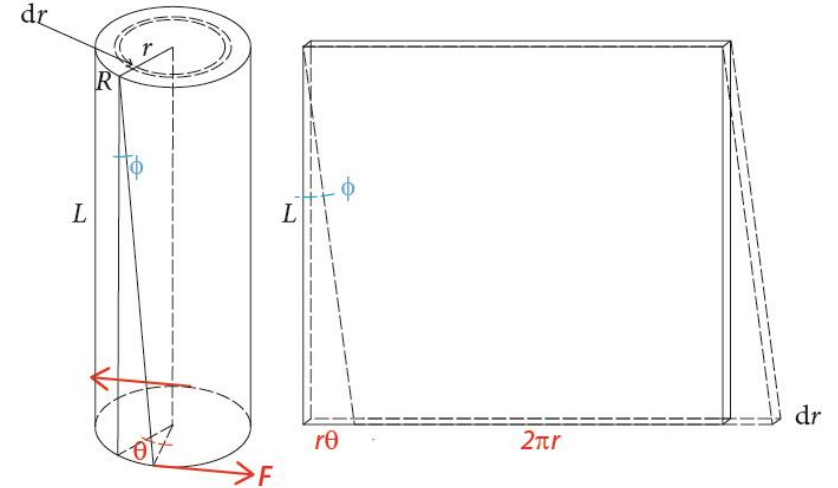
$$\sigma = \frac{dF}{2\pi r dr}$$

Per definizione di **Modulo di Rigidezza di Torsione** G si ha

$$\sigma = G \frac{\Delta L}{L} = G\phi$$

Ma $\Delta L = r\theta$, per cui possiamo scrivere

$$G = \frac{\sigma}{\phi} = \frac{L dF}{2\pi r \Delta L dr} = \frac{L dF}{2\pi \theta r^2 dr}$$



Dobbiamo ora integrare su tutto il raggio del filo, per ottenere la forza (o meglio il momento della forza) applicata:

$$dM = r dF = G \frac{2\pi \theta r^3}{L} dr \Rightarrow M = G \frac{2\pi \theta}{L} \int_0^R r^3 dr = G \frac{2\pi R^4}{4L} \theta$$

Da cui $k = G \frac{2\pi R^4}{4L}$. A partire da G viene anche introdotto il **modulo di Coulomb** $\mu = \frac{\pi G}{2}$

$$\Rightarrow M = \mu \frac{R^4}{L} \theta$$

Esempio numerico

Il modulo di Coulomb dell'acciaio è $\mu \sim 10^{11} \text{ Pa}$. Il momento necessario per far ruotare un filo del diametro di $200 \mu\text{m}$ e della lunghezza di 1 m di un angolo $\theta = 1 \text{ mrad}$ (1 mm ad 1 metro) è pari a

$$M = \mu \frac{R^4}{L} \theta = 10^{11} \times \frac{(100 \times 10^{-6})^4}{1} \times 10^{-3} = 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se all'estremità del filo monto un piattello con braccia da 1 m , la forza da applicare per avere questo momento è pari a:

$$F = 10^{-8} \text{ N}$$

Se immagino di avere 2 masse da 100 g all'estremità di braccia da 1 m appese al filo, e due masse da 10 kg a 10 cm da loro, l'attrazione gravitazionale tra le coppie di masse è:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 7 \times 10^{-11} \times \frac{0.1 \times 10}{0.1^2} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

Momento torcente:

Il momento esterno che abbiamo applicato per torcere il filo di θ attorno al proprio asse è

$$W = \int_0^{\theta} M d\theta' = \frac{1}{2} k \theta^2$$

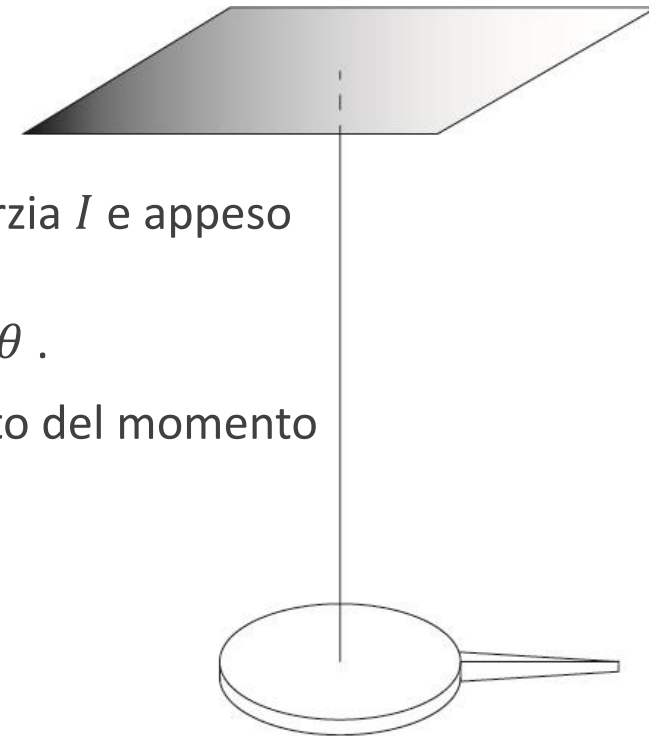
Questo lavoro è immagazzinato nel cilindro come energia potenziale elastica.

Si può realizzare in questo modo il pendolo di torsione:

- Un filo è fissato ad un'estremità al soffitto ed un oggetto di momento di inerzia I è appeso all'estremo libero.
- Per ruotare l'oggetto di un angolo θ occorre applicare un momento $M = k\theta$.
- Quando l'oggetto viene lasciato libero, esso entrerà in oscillazione per effetto del momento meccanico reattivo $-k\theta$ esercitato dal filo.
- Le oscillazioni sono descritte dalla seconda equazione cardinale del moto

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \text{con} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{ed} \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Dove I è il momento d'inerzia scritto come $I = \int_0^m r^2 dm$



Momento torcente:

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

Che ha come soluzione (esatta)

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il periodo di oscillazione del pendolo è quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{LI}{\mu R^4}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{LI}{\mu R^4}$$



0

Momento d'inerzia

Il momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio R e altezza h è

$$I = \int_0^M r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho h}{2} R^4 = \frac{M}{2} R^2$$

Mentre per la corona circolare ottengo

$$I = \int_0^M r^2 dm = 2\pi\rho h \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr = \frac{2\pi\rho h}{4} (R_f^4 - R_i^4) = \frac{\rho h \pi (R_f^2 - R_i^2)}{2} (R_f^2 + R_i^2) = \frac{M}{2} (R_f^2 + R_i^2)$$

Ad esempio per 2 corone circolari di 200g, entrambi con un diametro interno di 2 cm ed uno esterno rispettivamente di 4 e 6 cm ho:

$$I_4 = 50 \times 10^{-6} \text{ (kg m}^2\text{)} \text{ e } I_6 = 100 \times 10^{-6} \text{ (kg m}^2\text{)}$$

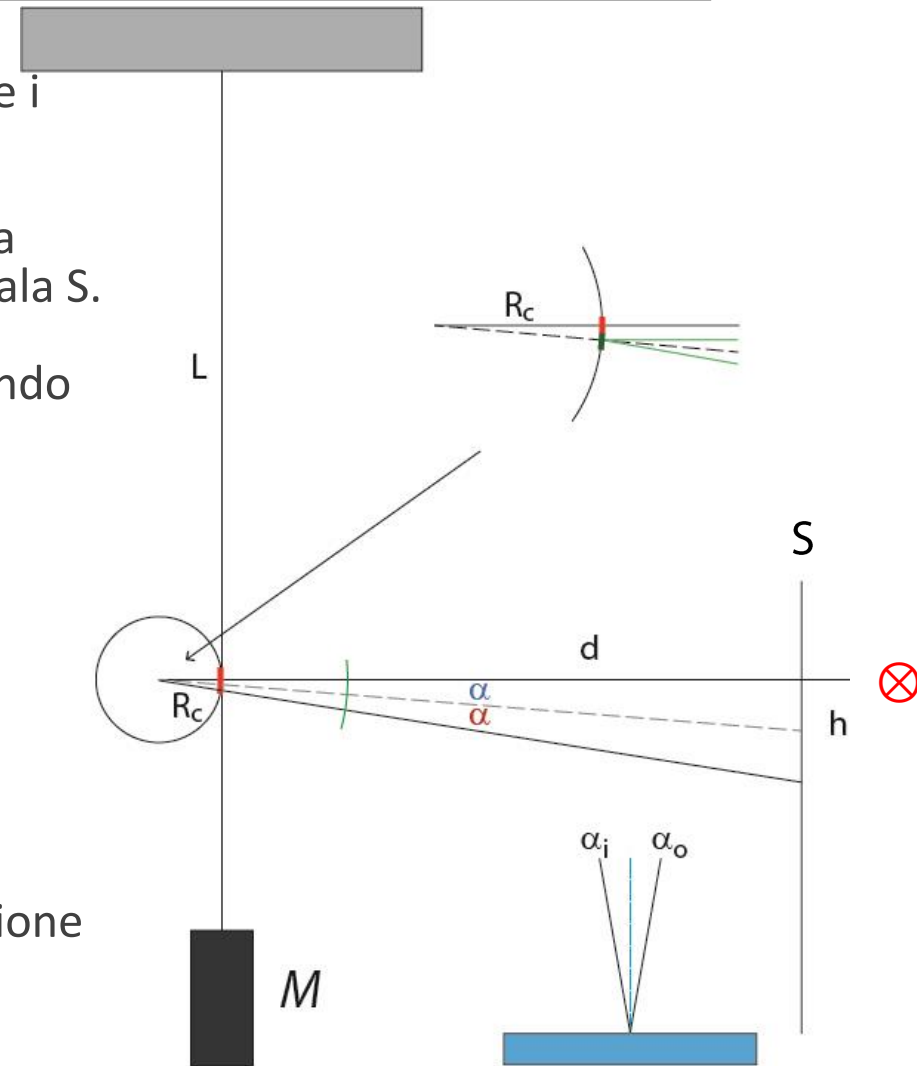
MA NON CONSCIAMO IL MOMENTO D'INERZIA COMPLETO DEL SISTEMA

Modulo di Young – Setup

Per la misura del modulo di Young dell'acciaio usiamo il principio della leva ottica (figura a lato) che permette di amplificare i piccoli effetti dell'allungamento del filo.

Per creare la leva ottica usiamo una sorgente luminosa \otimes posta alla stessa altezza dello specchio sul cilindro, ad una distanza d dalla scala S . Il filo è vincolato all'estremo superiore, ed avvolto su un cilindro (tangente lungo la verticale) ad una distanza L dal vincolo. Applicando una forza di trazione Mg provochiamo l'allungamento del filo.

- D_f diametro del filo
- R_c raggio del cilindro
- L lunghezza del filo fino al cilindro
- M massa appesa al filo
- S scala graduata
- d distanza specchio/scala graduata
- h spostamento dello spot luminoso successivo all'applicazione di Mg
- α angolo di rotazione del cilindro



Modulo di Young – Setup

Ricordando che $\sigma = E\varepsilon$. Scriviamo

$$\frac{F}{S_f} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Ora, per il set-up che abbiamo realizzato abbiamo

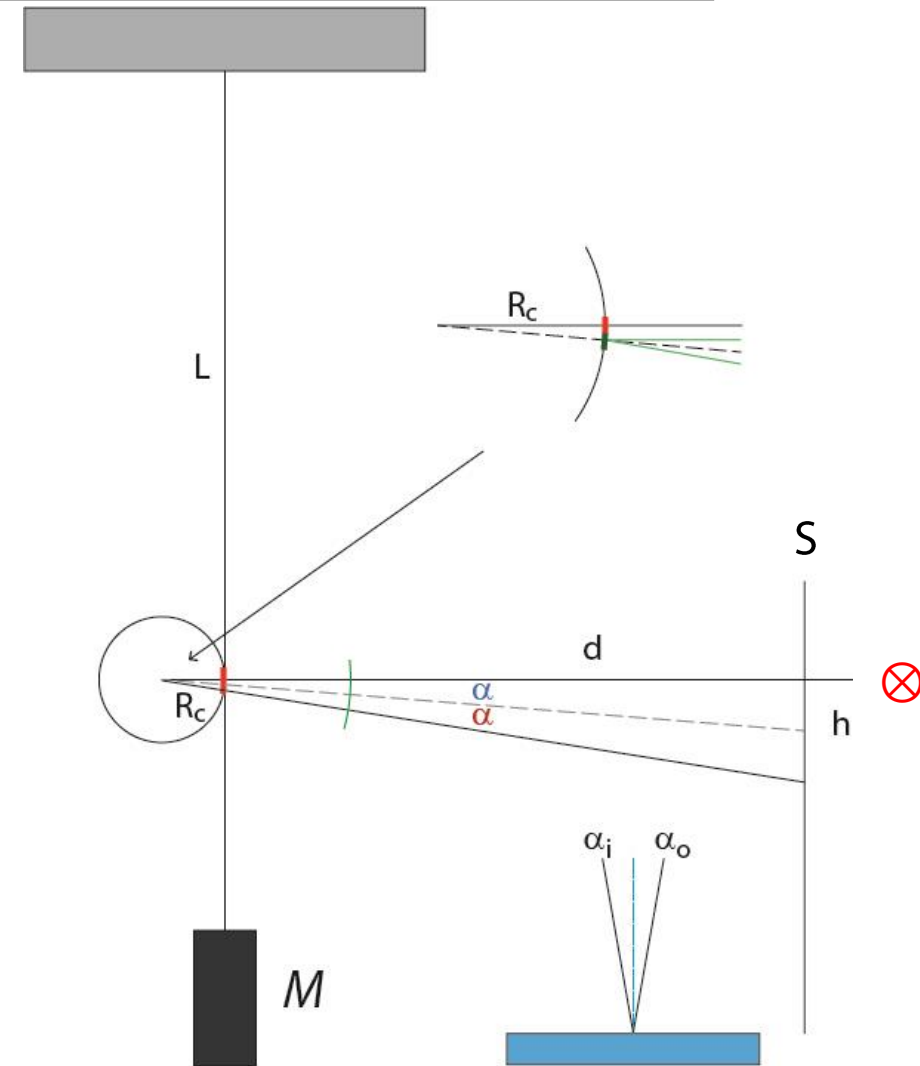
- $\Delta L = R_c \alpha = R_c \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{h}{d}$
- $F = Mg$
- $S_f = \pi(D_f/2)^2$

Che ci permette di ricavare il modulo di Young E in funzione di quantità misurabili

$$E = \frac{8gL}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M}{\tan^{-1} \frac{h}{d}}$$

Per piccoli angoli $\tan \alpha \approx \alpha$, possiamo scrivere $\tan^{-1} \frac{h}{d} \approx \frac{h}{d}$

$$E = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M}{h}$$



Modulo di Young – Errori

Per valutare E eseguiamo misure con diverse masse M_i che risultano in diverse altezze h_i

$$E_i = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2} \cdot \frac{M_i}{h_i}$$

Abbiamo solo errori di sensibilità di cui una parte

$$A = \frac{8gLd}{\pi R_c D_f^2}$$

Non varia da misura a misura mentre una parte

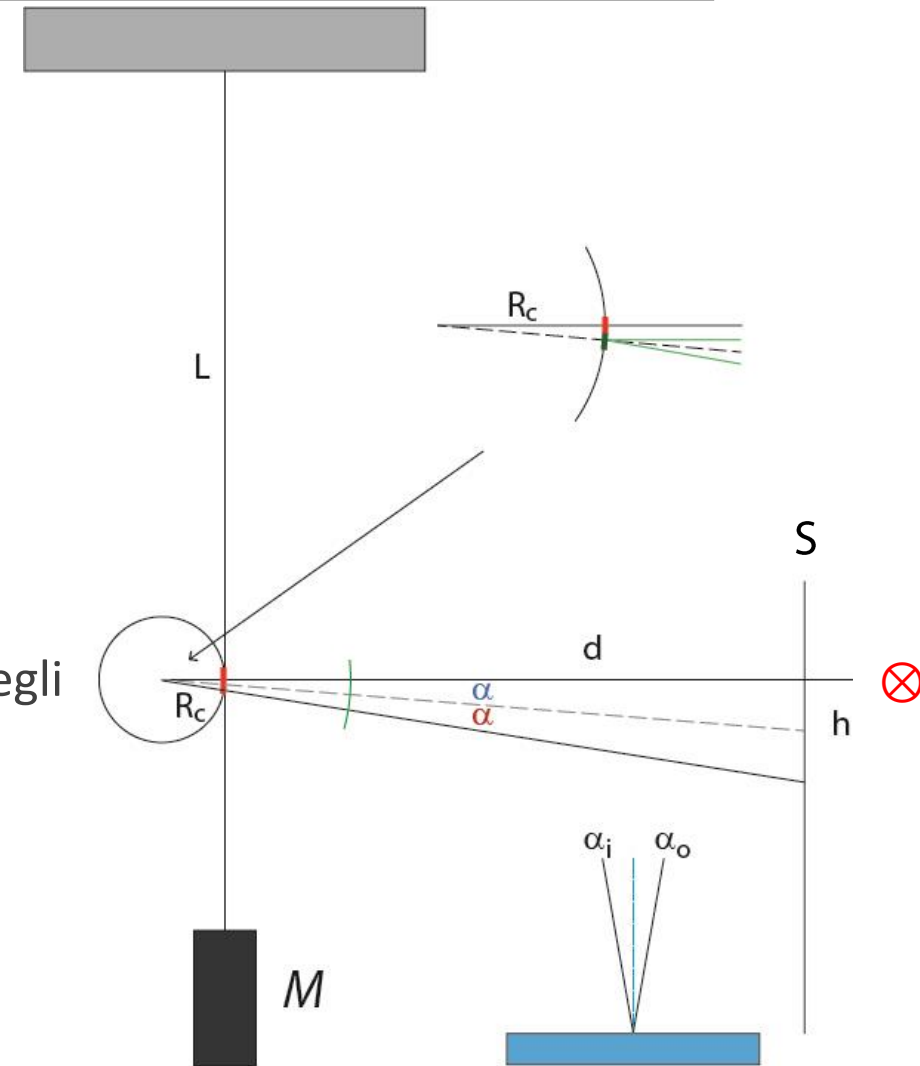
$$B_i = \frac{M_i}{h_i}$$

Cambia da misura a misura. Possiamo usare la propagazione degli errori massimi relativi

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta R_c}{R_c} + 2 \frac{\Delta D_f}{D_f}$$

e

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = \frac{\Delta M_i}{M_i} + \frac{\Delta h_i}{h_i}$$



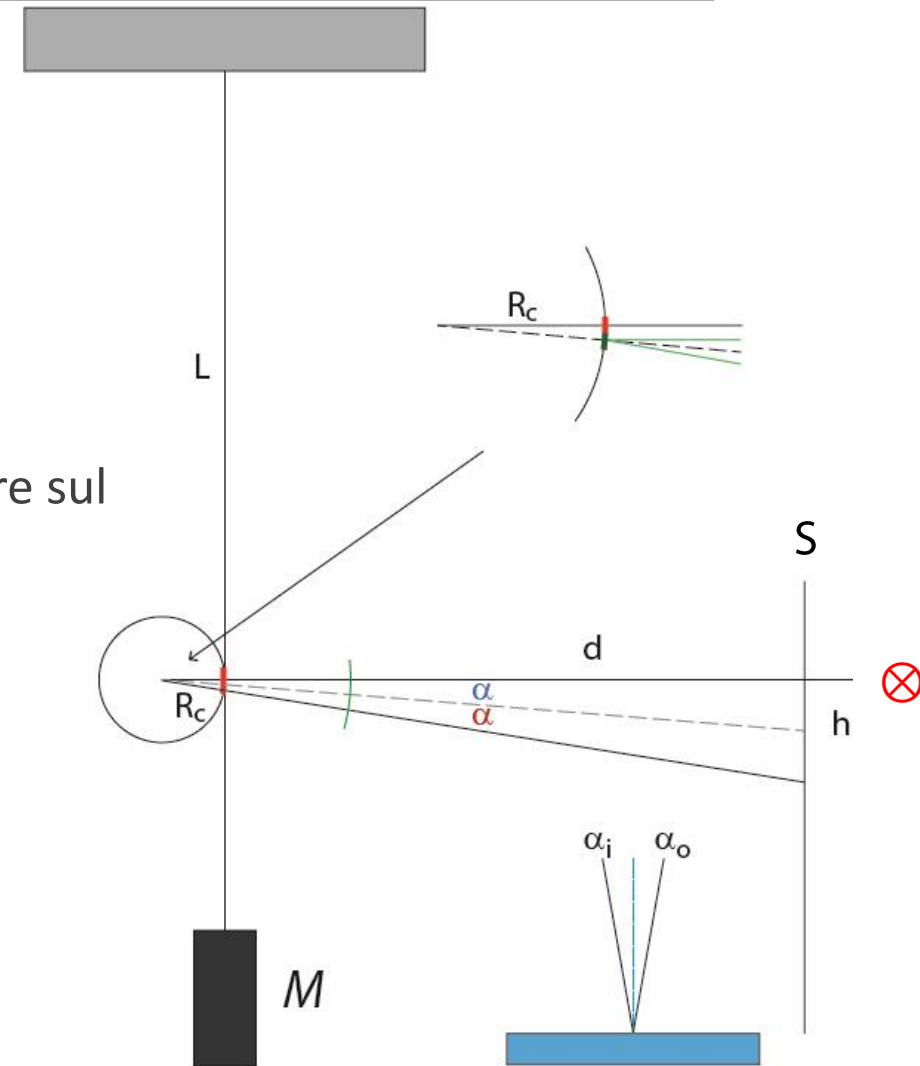
Modulo di Young – Errori

Le misure con masse diverse possono essere usate per una miglior stima di B ovvero

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\Delta B_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}} \quad e \quad \Delta B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}}$$

Quindi alla fine il modulo di Young è dato da $E = A \cdot B$ e l'errore sul modulo di Young è dato da

$$\Delta E = E \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$$



Modulo di Young – Grafici

Grafici: ΔL_i vs M_i
 B_i vs M_i

Strumenti:	L, d ed h	Metro lineare	$\Delta x_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
	R_c	Calibro ventesimale	$\Delta R_c = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	D_f	Calibro Palmer	$\Delta D_f = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	M_i	Bilancia	$\Delta M_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ g}$

Limite elastico acciaio: $2 \div 4 \times 10^8 \text{ Pa}$

La posizione di 0 deve essere alla stessa altezza dello specchio e della luce. Ruotare il cilindro per ottenerla

Il filo deve essere teso per non scorrere \Rightarrow pre caricare con 50-100 g il piattello

Verificare che al rimuovere della massa M_i ritroviamo la posizione di 0

Modulo di Coulomb – Set-up

Per la misura del modulo di Coulomb dell'acciaio usiamo il pendolo di torsione, come illustrato in figura.

Non conosciamo il momento d'inerzia I_0 del sistema del piattello, mentre sappiamo calcolare quello della corona circolare che può essere montata per oscillare sullo stesso asse del piattello (asse del filo).

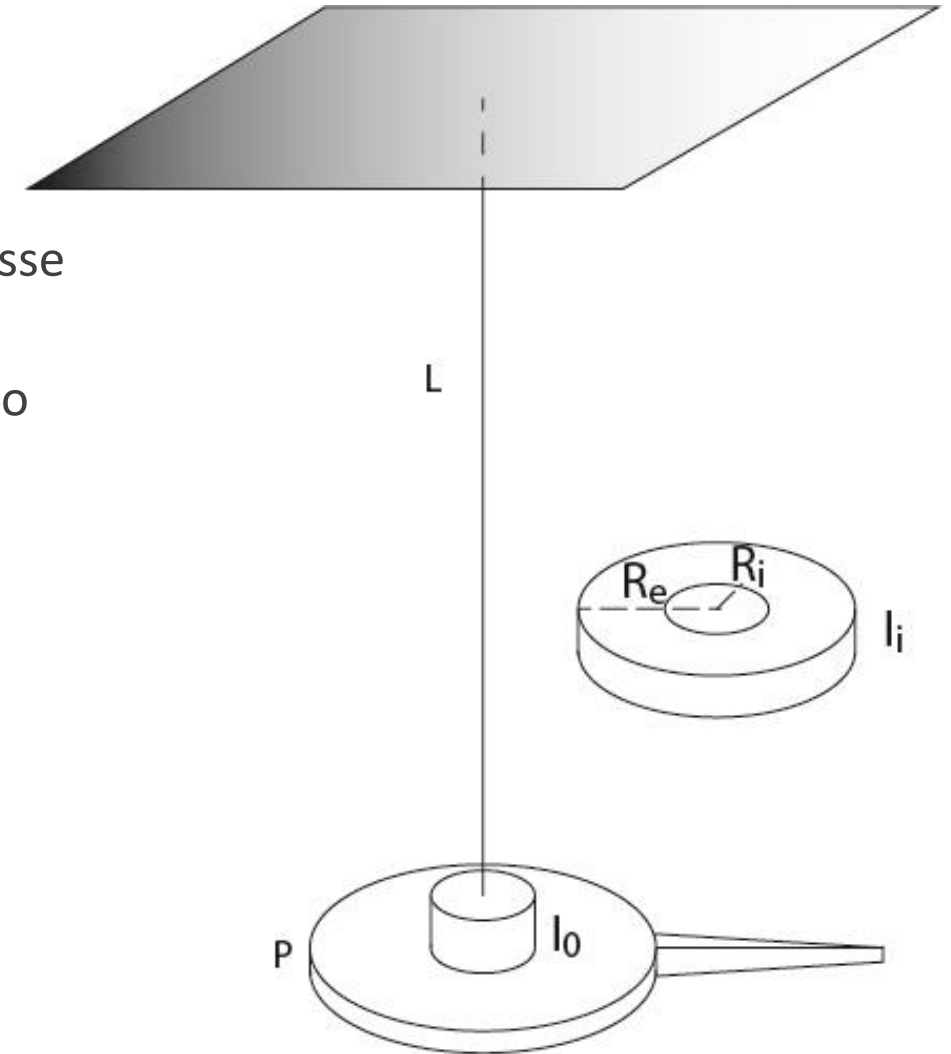
Possiamo però misurare il periodo di oscillazione del piattello scarico e del piattello caricato con la corona circolare, che varranno

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{LI_0}{\mu R^4} \quad e \quad T_i^2 = 4\pi^2 \frac{L(I_0 + I_i)}{\mu R^4}$$

Vale quindi

$$T_i^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{LI_i}{\mu R^4}$$

Che permette di calcolare il modulo di Coulomb a partire da quantità misurabili



Modulo di Coulomb – Set-up

Il modulo di Coulomb vale quindi

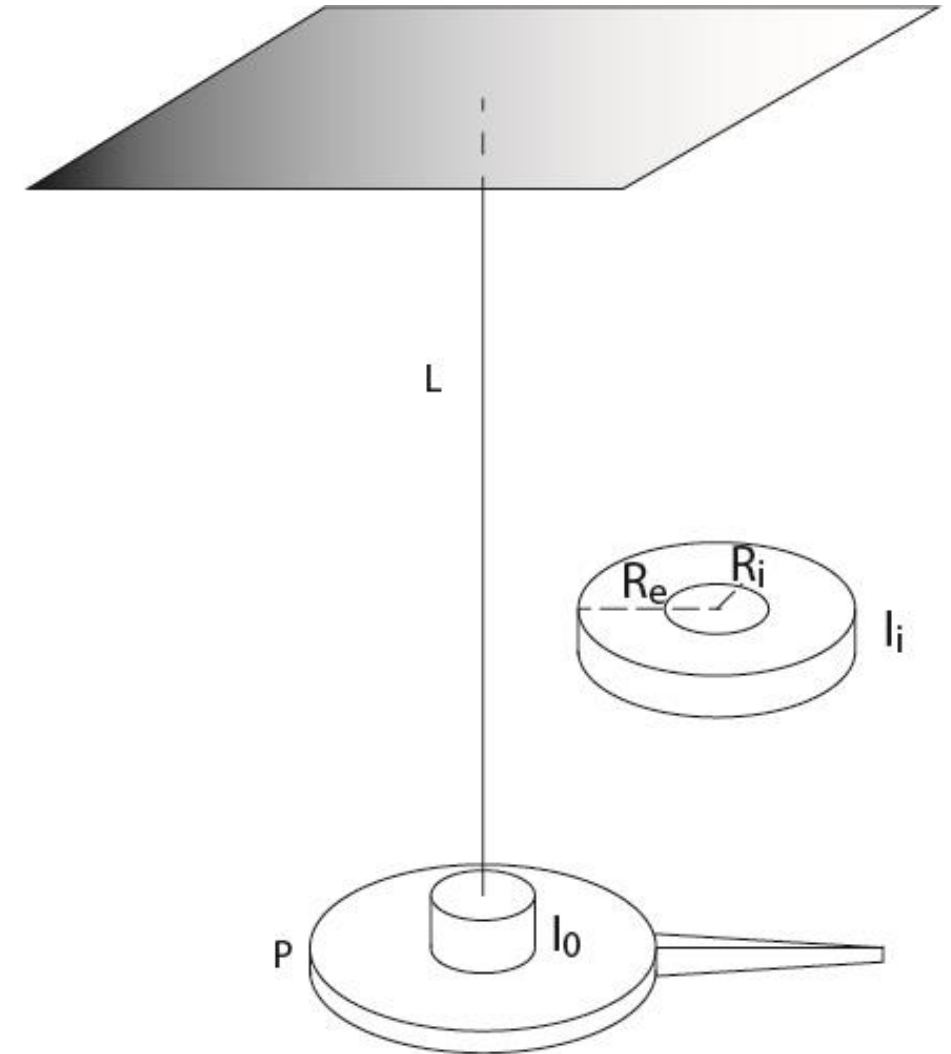
$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{R^4} \cdot \frac{I_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

Scrivendo esplicitamente il momento d'inerzia abbiamo

$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{(D_f/2)^4} \cdot \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

Con:

- P piattello di momento d'inerzia incognito I_0
- L lunghezza del filo
- D_f diametro del filo d'acciaio
- T_0 e T_i periodi d'oscillazione
- μ modulo di Coulomb in Pa o $(N m^{-2})$



Misura di T

Come nel caso del pendolo

Misurare $\tau = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$ per ogni lunghezza corona circolare e ripetere la misura allo stesso modo a piatto scarico.

- Misurare $\tau = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$ per almeno 10 volte (slide 74) per ogni corona circolare.
- Misurare $\tau_0 = 4 \div 6T = t_{stop} - t_{start}$ (piatti scarichi) per almeno 10 volte (slide 74) per ogni corona circolare in modo da avere misure indipendenti.
- Per la trattazione statistica che abbiamo visto i risultati seguono una distribuzione Gaussiana.
 - La miglior stima del valore vero di τ è il valor medio $\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{10} \tau_i$
 - La miglior stima della varianza della singola misura τ_i è data da $\sigma_{\tau_i}^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (\tau_i - \bar{\tau})^2$
 - La miglior stima della varianza della media è data da $\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \frac{\sigma_{\tau_i}^2}{10}$
 - Abbiamo quindi $\bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}}$.
 - Tenuto conto che $\bar{T} = \bar{\tau}/5$ e che $\sigma_{\bar{T}} = \sigma_{\bar{\tau}}/5$ abbiamo anche misurato
$$\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}}$$

Modulo di Coulomb – Errori

Data la misura del modulo di Coulomb

$$\mu = 4\pi^2 \frac{L}{(D_f/2)^4} \cdot \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_0^2}$$

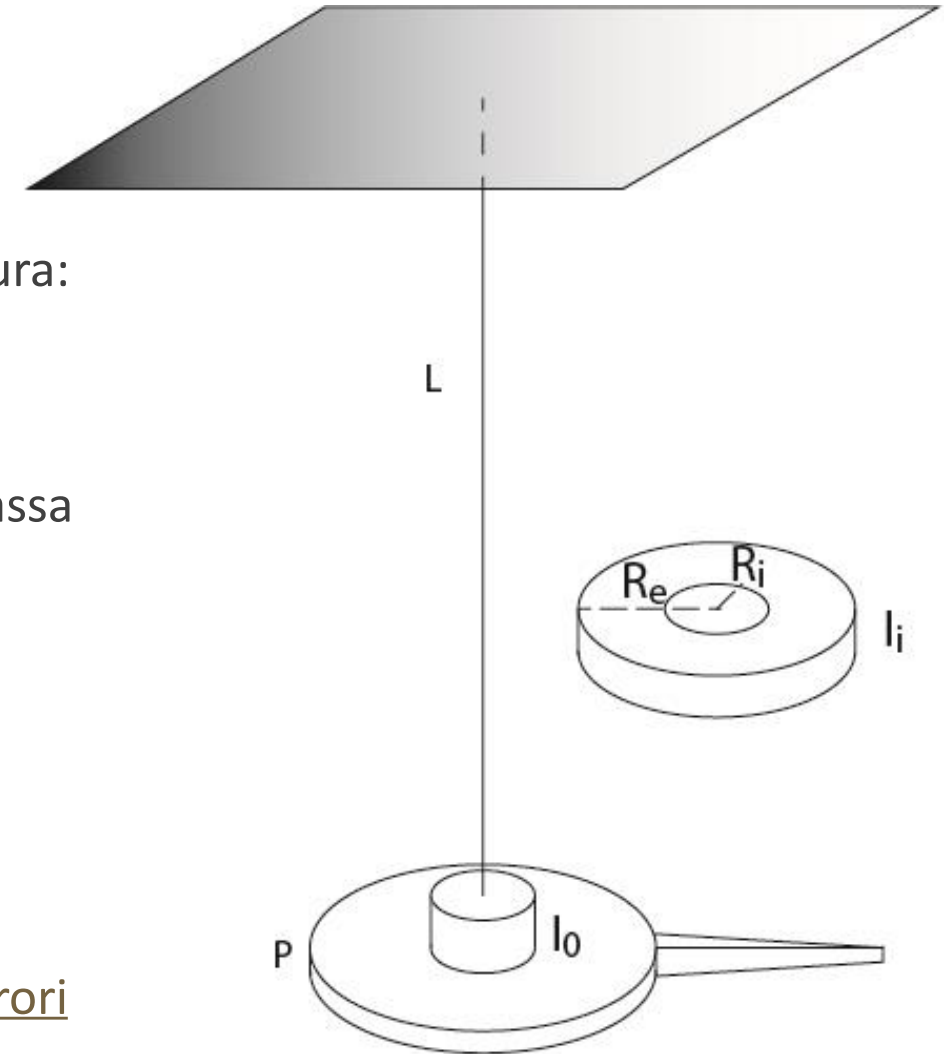
Abbiamo due contributi che non cambiano da misura a misura:

$$A = \frac{L}{(D_f/2)^4}, \text{ con errori } \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + 4 \frac{\Delta D_f}{D_f}$$

E contributi che cambiano per diverse corone circolari di massa M_i (da notare che se le corone circolari hanno gli stessi diametri, questa parte va aggiunta in A e non in B)

$$B = \frac{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i \cdot M_i}{T_i^2 - T_{0i}^2}, \text{ con errori } \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta M_i}{M_i} + \frac{\Delta((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i}{((D_e/2)^2 + (D_i/2)^2)_i} + \frac{\Delta(T_i^2 - T_{0i}^2)}{T_i^2 - T_{0i}^2}$$

Propagati come errori massimi (nell'ipotesi che siano gli errori dominanti)



Modulo di Coulomb – Errori

Dove

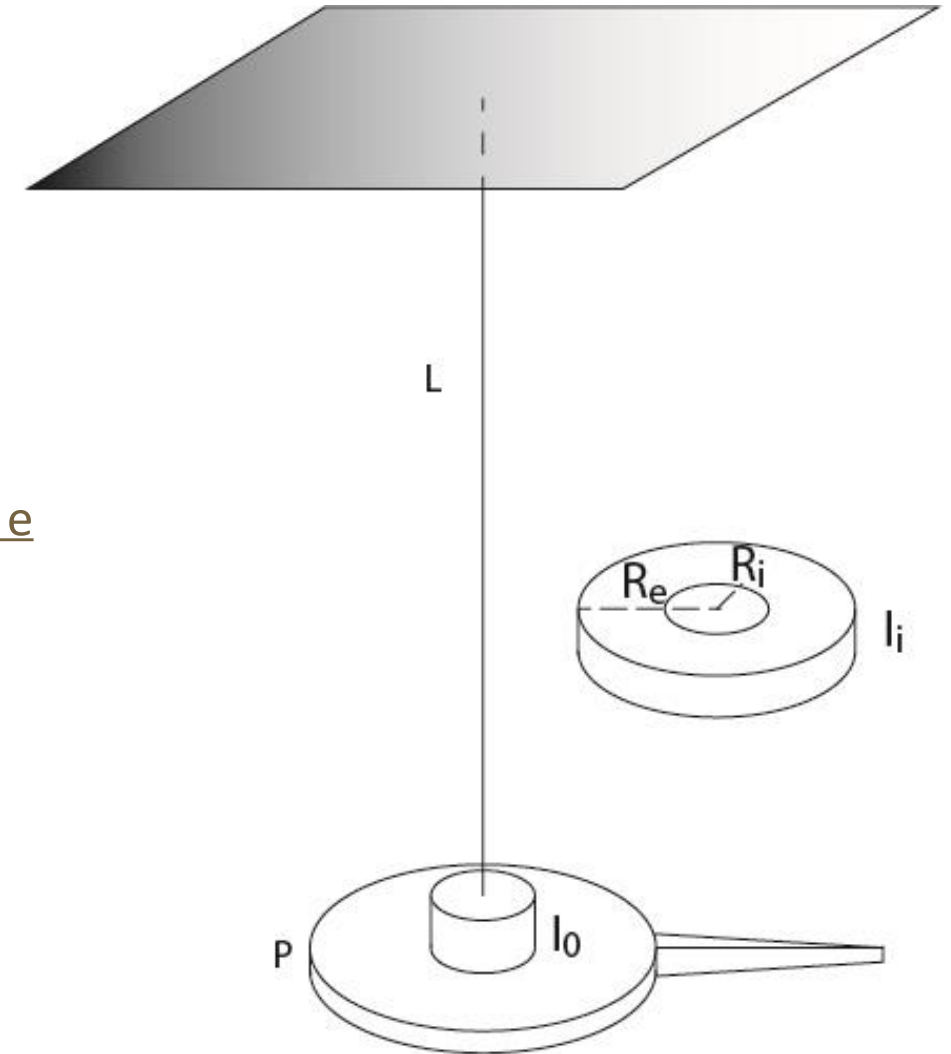
$$\Delta\left(\left(D_e/2\right)^2 + \left(D_i/2\right)^2\right)_i = \left(D_e\Delta D_e + D_i\Delta D_i\right)_i$$

e dove

$$\Delta\left(T_i^2 - T_{0i}^2\right) = 2T_i\Delta T_i + T_i2T_{0i}\Delta T_{0i}$$

e con l'errore massimo sul periodo ottenuto da $\Delta T_i = 3\sigma_{T_i}$

Nel caso i termini dominanti nell'errore siano statistici trasformare tutti gli errori massimi in deviazioni standard e usare la legge di propagazione della varianza



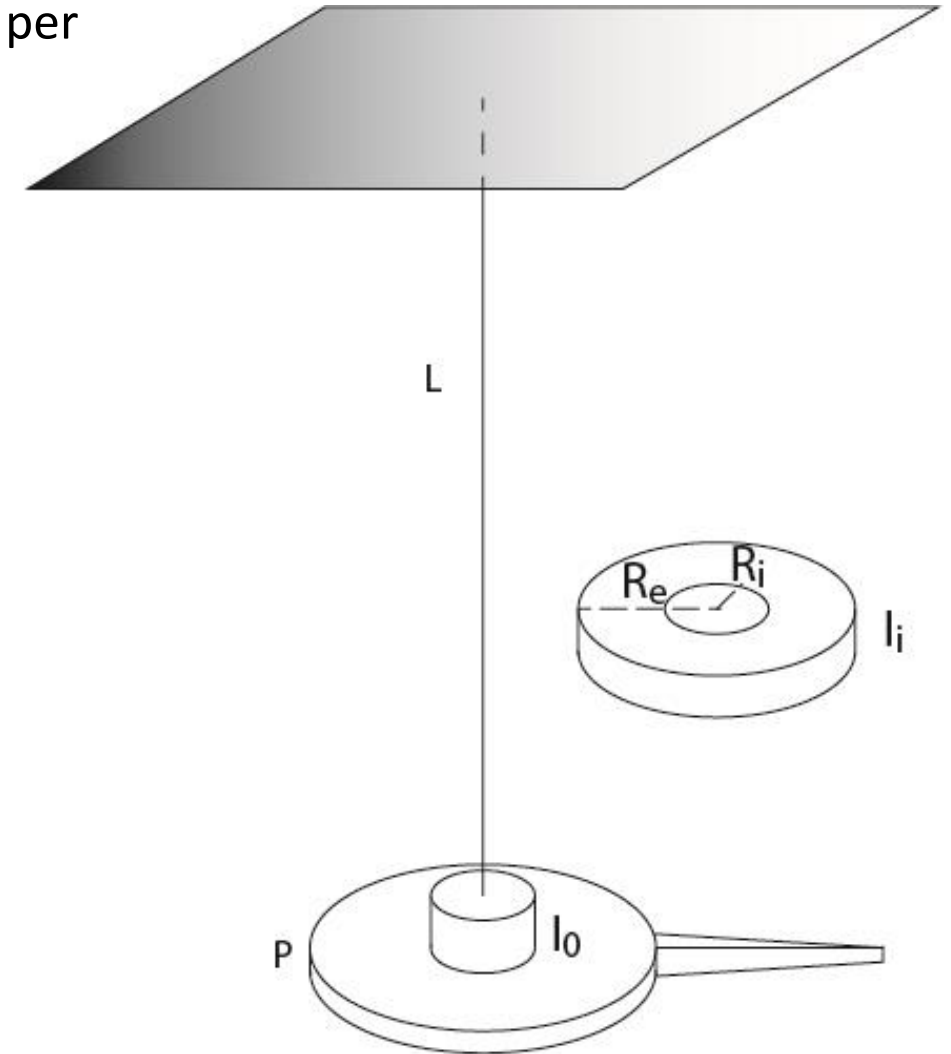
Modulo di Coulomb – Errori

Come per il modulo di Young, posso usare le diverse misure per ottenere la miglior stima di B

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\Delta B_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}} \quad e \quad \Delta B^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta B_i^2}}$$

Quindi alla fine il modulo di Coulomb è dato da $\mu = A \cdot B$ e l'errore sul modulo di Coulomb è dato da

$$\Delta\mu = \mu \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$$



Modulo di Coulomb – Grafici

Grafici: $T_i^2 - T_{0i}^2$ vs I_i
 B_i vs I_i

Strumenti:	L	Metro lineare	$\Delta x_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
	R_e, R_i	Calibro ventesimale	$\Delta R_i = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	D_f	Calibro Palmer	$\Delta D_f = 0.5 \times 10^{-5} \text{ m}$
	M_i	Bilancia	$\Delta M_i = 0.5 \times 10^{-3} \text{ g}$

Slides

TROVATE LE SLIDE AGGIORNATE SULLA PAGINA MOODLE2 DEL CORSO

<http://moodle2.units.it/course/view.php?id=315>

Nelle news del forum

<http://moodle2.units.it/mod/forum/discuss.php?d=460>