a.a. 2014-2015 **Nome:** A

1. In una data città inglese risulta che il 35% dei votanti sono Conservatori, il 45% sono Laburisti ed il 20% sono Indipendenti. Nelle elezioni hanno votato rispettivamente il 70%, l'85% ed il 60% dei Conservatori, Laburisti ed Indipendenti; scegliendo a caso una persona di questa città che non ha votato, qual è la probabilità che sia Laburista?

SOLUZIONE: Sia (L) laburista (C) conservatore e (I) indipendente. Sia inoltre (V) ha votato e $(\bar{V})$ non ha votato. Allora la probabilità che scegliendo a caso una persona di questa città che non ha votato, essa sia Laburista è data da:

$$P(L|\bar{V}) = \frac{P(L)\cdot P(\bar{V}|L)}{P(L)\cdot P(\bar{V}|L) + P(C)\cdot P(\bar{V}|C) + P(I)\cdot P(\bar{V}|I)}$$

Da cui

$$P(L|\bar{V}) = \frac{0.45\cdot 0.15}{0.45\cdot 0.15 + 0.35\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.4} = 0.267$$

2. La variabile casuale $x \in [0,1]$ ha funzione di distribuzione $-ax^2 + 0.5x + 0.5$.

a) Calcolare il valore di a

b) Calcolare valore medio μ e deviazione standard σ

c) Calcolare $P(|x-\mu| \geq \sigma)$ e commentare il risultato

SOLUZIONE:

a) devo avere:

$$\int_0^1 (-ax^2 + 0.5x + 0.5)\, dx = 1 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9-4a}{12} \Longrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Per cui

$$f(x) = 0.75x^2 + 0.5x + 0.5 \qquad \geq 0 \text{ per ogni } x \in [0,1]$$

b) Il valor medio, ovvero il valore di aspettazione di x, è:

$$\mu = E[x] = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (0.75x^3 + 0.5x^2 + 0.5x)dx = \frac{3}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{9+8+12}{48} = \frac{29}{48} = 0.60$$

La varianza vale:

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 = \int_0^1 (0.75x^4 + 0.5x^3 + 0.5x^2)dx - 0.60^2 = \frac{3}{20} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - 0.36 = \frac{36+30+40}{240} - 0.36 = 0.44 - 0.36 = 0.08$$

Da cui $\sigma = 0.28$.

c) Devo ora calcolare il valore della probabilità nell'intervallo $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$, ovvero $[0.32, 0.88]$

$$P(|x-\mu| \leq \sigma) = \int_{0.32}^{0.88} (0.75x^2 + 0.5x + 0.5)dx = \frac{1}{4}(0.88^3 - 0.32^3) + \frac{1}{4}(0.88^2 - 0.32^2) + \frac{1}{2}(0.88 - 0.32) = \frac{0.65}{4} + \frac{0.67}{4} + \frac{0.56}{2}$$

Da questo ottengo la probabilità di avere una misura fuori dall'intervallo

$$P(|x-\mu| \geq \sigma) = 1 - 0.61 = 0.39$$

Di ~10% maggiore rispetto alla probabilità dell'intervallo di una deviazione standard di una distribuzione di Gauss

A

3. La grandezza fisica $X = \frac{2mgR^2}{a+a'} - mR^2$ con unità di misura in $kg \cdot m^2$ è misurata in modo indiretto a partire dalle misure:

$m = 35.0 \pm 0.1\ g$ $\quad g = 9.81 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$ $\quad R = 19.0 \pm 0.2\ mm$ $\quad a = 2.00 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$ $\quad a = 1.00 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$

A. Scrivere le formule da utilizzare e calcolare l'incertezza di misura su X assumendo che le incertezze su $m, g, R, a\ e\ a'$ siano dovute alla risoluzione di lettura
B. Scrivere le formule da utilizzare nel caso in cui
   a. le incertezze siano tutte statistiche
   b. l'incertezza su m ed R sia dovuta alla risoluzione di lettura e le incertezze su $g, a\ e\ a'$ siano statistiche
C. Quale misura andrebbe migliorata per diminuire l'incertezza su X?

SOLUZIONE:

A: la quantità X fornisce il momento d'inerzia del volano. L'incertezza è data da $\Delta X = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial X}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$, ovvero:

$$\Delta X = \left|\frac{2gR^2}{a+a'} - R^2\right| \Delta m + \left|\frac{2mR^2}{a+a'}\right| \Delta g + 2R\left|\frac{2mg}{a+a'} - m\right| \Delta R + \left|\frac{2mgR^2}{(a+a')^2}\right| (\Delta a + \Delta a')$$

Dobbiamo usare le unità corrette per avere il momento d'inerzia in $kg \cdot m^2$, cioè

$m = 0.0350 \pm 0.0001\ kg$ $\quad g = 9.81 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$ $\quad R = 0.0190 \pm 0.0002\ m$ $\quad a = 2.00 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$ $\quad a' = 1.00 \pm 0.01\ m\ s^{-2}$

Da cui

$$\Delta X = 2.0 \times 10^{-3} \cdot 0.0001 + 8.4 \times 10^{-6} \cdot 0.01 + 7.4 \times 10^{-3} \cdot 0.0002 + 2.7 \times 10^{-5} \cdot 0.02$$

ovvero

$$\Delta X = 2.0 \times 10^{-7} + 8.4 \times 10^{-8} + 7.4 \times 10^{-7} + 2.7 \times 10^{-7}$$

B: a) nel caso di incertezze statistiche la varianza è data da $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$ per cui

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{2gR^2}{a+a'} - R^2\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{2mR^2}{a+a'}\right)^2 \sigma_g^2 + 4R^2\left(\frac{2mg}{a+a'} - m\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{2mgR^2}{(a+a')^2}\right)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2)$$

b) l'incertezza dominante è quella sulle accelerazioni, e quindi trasformiamo gli errori massimi su m ed R in deviazioni standard $\sigma_x = \Delta x/\sqrt{3}$ ed usiamo a)

C: nel caso di errori tutti massimi (o tutti statistici) dobbiamo migliorare la misura di R; nel caso di errori misti la misura delle accelerazioni.

A

4. Tra le grandezze fisiche X e Y si ipotizza esista la relazione: $Y = e^{mX}$. Si hanno a disposizione le seguenti misure di X e Y: (0.80, 1.42), (3.00, 2.35), (12.0, 38.0), (23.0, 1.01×10^3) e (30.0, 8.09×10^3) con incertezze massime assolute di 0.01 per X, e incertezze statistiche relative di 0.05 per Y.

a) Riportare i valori misurati nei grafici con scala lineare e semilogaritmica, e commentare l'accordo con l'andamento previsto.

Facoltativo:

b) Scrivere le formule necessarie per calcolare valore e incertezza di *m*.

c) Fare i calcoli e riportare nei grafici la curva corrispondente.

SOLUZIONE:

a: Mentre dalla scala lineare è estremamente difficile valutare se l'andamento è di tipo e^{mX} nella scala semilogaritmica vedo che i punti stanno su una retta.

b: Abbiamo la relazione $m = \frac{\ln Y}{X}$; ogni coppia di misure (x_i, y_i) mi fornisce un valore di m_i con la sua varianza $\sigma^2_{m_i}$ che varia da coppia a coppia. La varianza sulle $m_i = \frac{\ln y_i}{x_i}$, è data da:

$$\frac{\sigma^2_{m_i}}{m_i^2} = \frac{\sigma^2_{x_i}}{x_i^2} + \frac{\sigma^2_{y_i}}{(y_i \ln y_i)^2} = \frac{10^{-5}}{x_i^2} + \frac{2.5 \times 10^{-3}}{(\ln y_i)^2}$$

Il valore di m è quindi dato dalla media pesata

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{\sigma^2_{m_i}}}{\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{\sigma^2_{m_i}}}$$

c: vale $m_1 = 0.438 \pm 0.063$, $m_2 = 0.285 \pm 0.017$, $m_3 = 0.303 \pm 0.004$, $m_4 = 0.301 \pm 0.002$, $m_5 = 0.300 \pm 0.002$ da cui si ottiene

$$m = 0.3005 \pm 0.0001$$