a.a. 2014-2015 **Nome:** B

1. Uno studente deve sostenere un esame. Se studia passa con probabilità 95 %, ma se va ad una festa la sera prima la sua probabilità di promozione si riduce al 50 %. Deciderà di andare alla festa se esce testa lanciando una moneta equa. Se egli supera l'esame qual è la probabilità che sia andato alla festa?

SOLUZIONE: Sia E l'evento "Passa l'esame" (mentre $\bar{E}$ non passa l'esame) mentre l'evento F "va alla festa" (con $\bar{F}$ non va alla festa). Abbiamo quindi

$$P(E|\bar{F}) = 0.95 \quad e \quad P(E|F) = 0.5$$

Mentre la probabilità che vada (non vada) alla festa è

$$P(F) = P(\bar{F}) = 0.5$$

La probabilità che avendo passato l'esame sia andato alla festa è

$$P(F|E) = \frac{P(F) \cdot P(E|F)}{P(F) \cdot P(E|F) + P(\bar{F}) \cdot P(E|\bar{F})}$$

Numericamente

$$P(F|E) = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.95} = \frac{0.25}{0.70} = 0.345$$

2. La variabile casuale $x \in [0, \pi]$ ha funzione di distribuzione $f(x) = a(1 + b \sin x)$ con $b = 0.25$.

a) Calcolare il valore di a.
b) Calcolare valore medio μ e deviazione standard σ di x, ed il valore medio di $\sin x$.
c) Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si otterrebbero con una funzione di distribuzione uniforme.

SOLUZIONE:
a) devo avere:

$$\int_0^\pi a(1 + 0.25 \sin x)\, dx = 1 = a\int_0^\pi dx - 0.25a\int_0^\pi d\cos x = a\pi + \frac{1}{2}a \implies a = \frac{2}{(2\pi + 1)}$$

b) il valore medio (ovvero il valore di aspettazione) di x è data da

$$\mu = E[x] = \frac{2}{(2\pi + 1)}\int_0^\pi x\left(1 + \frac{1}{4}\sin x\right) dx = \frac{2}{(2\pi + 1)}\int_0^\pi x dx + \frac{1}{2(2\pi + 1)}\int_0^\pi x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{(2\pi + 1)} + \frac{\pi}{2(\pi + 1)} = \frac{\pi(2\pi + 1)}{2(2\pi + 1)} = \frac{\pi}{2}$$
$$= 1.571$$

La varianza vale:

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 = \frac{2}{(2\pi + 1)}\int_0^\pi x^2\left(1 + \frac{1}{4}\sin x\right) dx - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^3}{3(2\pi + 1)} + \frac{\pi^2 - 4}{2(2\pi + 1)} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{2\pi^3 + 3\pi^2 - 24}{12(2\pi + 1)} = 0.774$$

Da cui una deviazione standard di $\sigma = 0.880$.

Il valore di $\langle \sin x \rangle$ è

$$\langle \sin x \rangle = \frac{2}{(2\pi + 1)}\int_0^\pi \sin x\left(1 + \frac{1}{4}\sin x\right) dx = \frac{2}{(2\pi + 1)}\int_0^\pi \sin x \, dx + \frac{1}{2(2\pi + 1)}\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{4}{(2\pi + 1)} + \frac{\pi}{4(2\pi + 1)}$$
$$= \frac{\pi + 16}{4(2\pi + 1)} = 0.657$$

c) il valore della deviazione standard è molto vicino a quello che si avrebbe con una distribuzione uniforme, mentre il valor medio coincide con quello di una distribuzione uniforme. Valgono quindi le stesse considerazioni fatte sul confronto tra distribuzioni Gaussiane e uniformi.

B

3. La grandezza fisica $X = \left(\frac{4Mg}{\pi D^2} + P_a\right)\frac{\pi D^2 h}{4}$ ha le dimensioni di $N \cdot m$ ed è misurata in modo indiretto a partire dalle misure:

$$M = 1300 \pm 1\, g \qquad g = 9.81 \pm 0.01\, m\, s^{-2} \qquad P_a = 100132 \pm 750\, Pa \qquad D = 2.51 \pm 0.04\, cm \quad h = 79.4 \pm 0.2\, mm$$

A. Scrivere le formule da utilizzare e calcolare l'incertezza di misura su X assumendo che le incertezze siano dovute alla risoluzione di lettura.
B. Scrivere le formule da utilizzare nel caso in cui le incertezze siano tutte statistiche.
C. Quale misura andrebbe migliorata per diminuire l'incertezza su X?

SOLUZIONE:

A: la quantità X fornisce la misura di $PV = c$ dei gas perfetti. L'incertezza è data da $\Delta X = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial X}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$, ovvero:

$$\Delta X = |gh|\Delta M + |Mh|\Delta g + \left|\frac{\pi D h P_a}{2}\right|\Delta D + \left|\frac{\pi D^2 h}{4}\right|\Delta P_a + \left|\left(\frac{4Mg}{\pi D^2} + P_a\right)\frac{\pi D^2}{4}\right|\Delta h$$

Dobbiamo usare le unità corrette per PV in $N \cdot m$, cioè

$$M = 1.300 \pm 0.001 k\, g \quad g = 9.81 \pm 0.01\, m\, s^{-2} \quad P_a = 100132 \pm 750\, Pa \quad D = 0.0251 \pm 0.0004\, m \quad h = 0.0794 \pm 0.0002\, m$$

abbiamo quindi

$$\Delta X = 0.7789 \cdot 0.001 + 0.1032 \cdot 0.01 + 313.46 \cdot 0.0004 + 3.929 \times 10^{-5} \cdot 750 + 62.401 \cdot 0.0002$$

Ovvero

$$\Delta X = 7.79 \times 10^{-4} + 1.032 \times 10^{-3} + 1.254 \times 10^{-1} + 2.947 \times 10^{-2} + 1.248 \times 10^{-2}$$

B: nel caso di incertezze statistiche la varianza è data da $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$ per cui

$$\sigma_X^2 = (gh)^2\sigma_M^2 + (Mh)^2\sigma_g^2 + \left(\frac{\pi D h P_a}{2}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\pi D^2 h}{4}\right)^2 \sigma_P^2 + \left[\left(\frac{4Mg}{\pi D^2} + P_a\right)\frac{\pi D^2}{4}\right]^2 \sigma_h^2$$

C: la misura su D che ha un contributo pari ad un fattore 5 maggiore a quella su P_a.

B

4. Tra le grandezze fisiche X e Y si ipotizza esista la relazione: $Y = X^m$. Si hanno a disposizione le seguenti misure di X e Y: (3.00,6.89), (12.0, 91.0), (23.0, 288.), (30.0, 4.560×10^2) e (45, 9.06×10^2) con incertezze massime assolute di 0.01 per X, e incertezze statistiche relative di 0.05 per Y.

a) Riportare i valori misurati nei grafici con scala lineare e log-log, e commentare l'accordo con l'andamento previsto.
Facoltativo:

b) Scrivere le formule necessarie per calcolare valore e incertezza di *m*.

c) Fare i calcoli e riportare nei grafici la curva corrispondente.

a: Mentre dalla scala lineare è estremamente difficile valutare se l'andamento è di tipo X^m nella scala logaritmica vedo che i punti stanno su una retta.

b: Abbiamo la relazione $m = \frac{\log Y}{\log X}$; ogni coppia di misure (x_i, y_i) mi fornisce un valore di m_i con la sua varianza $\sigma^2_{m_i}$ che potrebbe variare da coppia a coppia. La varianza sulle $m_i = \frac{\log y_i}{\log x_i}$, è data da,

$$\sigma^2_{m_i} = \frac{1}{(\ln 10)^2}\left(\frac{\sigma^2_{x_i}}{x_i^2} + \frac{\sigma^2_{y_i}}{y_i^2}\right)$$

dove consideriamo dominanti gli errori statistici e trasformiamo gli errori sulle X di conseguenza (e quindi non varia da coppia a coppia): Il valore di m è quindi dato dalla media aritmetica, mentre la varianza è data da $\sigma^2_{m_i}/5$

c: vale $m_1 = 1.757 \pm 0.022$, $m_2 = 1.815 \pm 0.022$, $m_3 = 1.806 \pm 0.022$, $m_4 = 1.800 \pm 0.022$, $m_5 = 1.789 \pm 0.022$ da cui si ottiene

$$m = 1.793 \pm 0.010$$