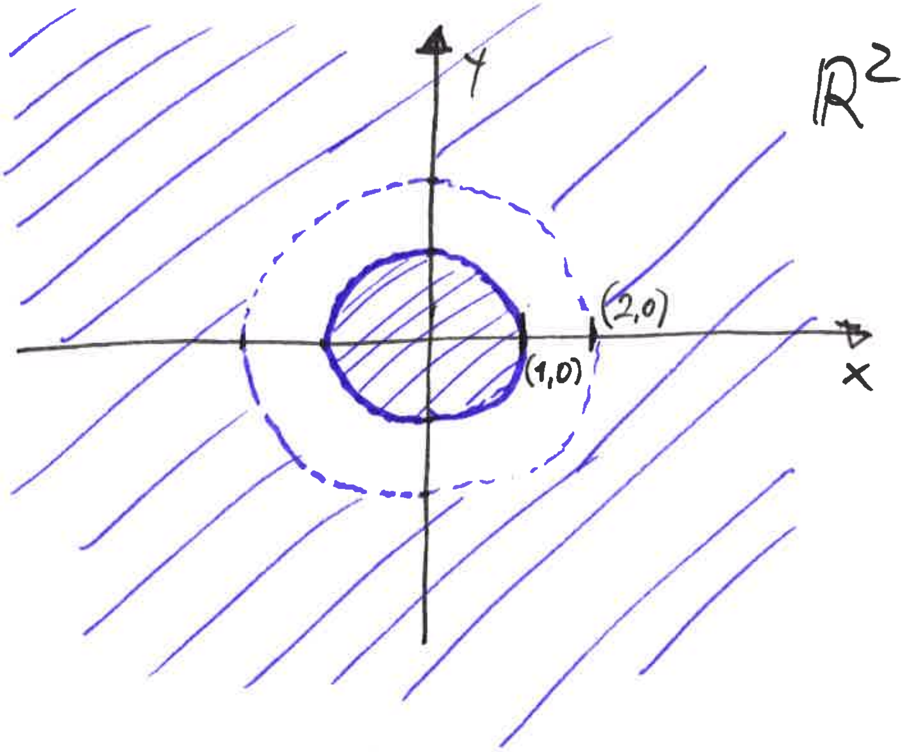
Esercizio:

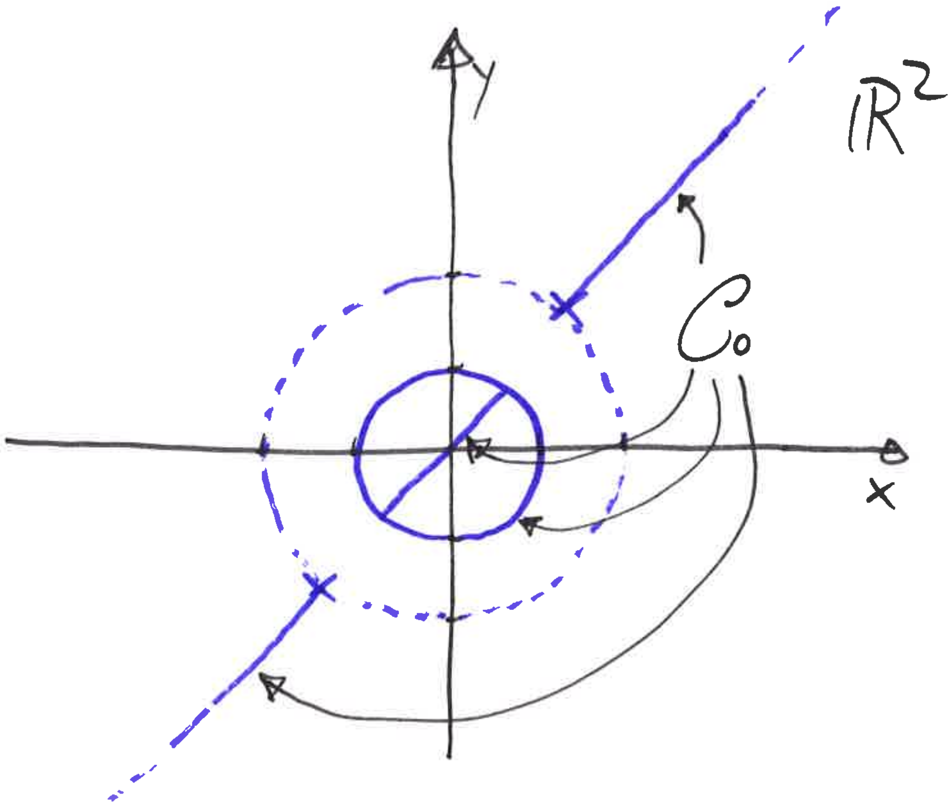
Data $f(x,y) = (x-y)\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{4-x^2-y^2}}$

Trovare: a) D.E. b) C_0 (curva di livello 0)

a) $D.E. = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1-x^2-y^2}{4-x^2-y^2} \geq 0\right\}$



b)



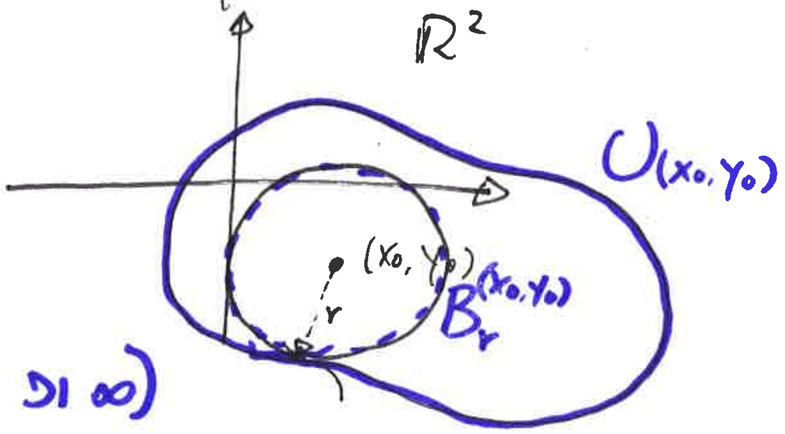
- Intorni e funzioni continue:

def. Si definisce una **PALLA** di centro $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e raggio $r>0$ l'insieme

$$B_r^{(x_0,y_0)} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}\big((x,y),(x_0,y_0)\big)<r\right\}$$

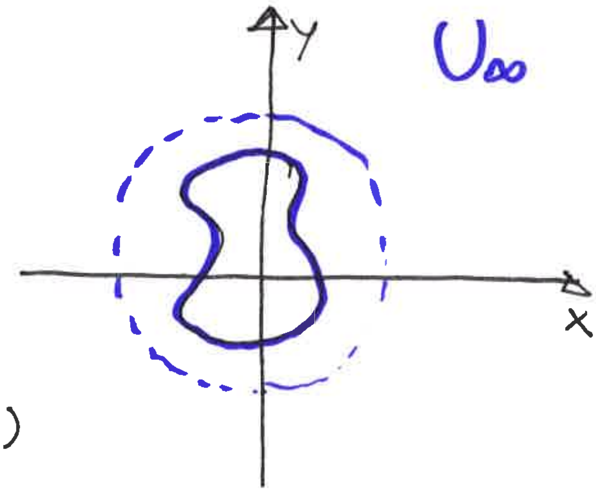
def. (**INTORNO DI UN PUNTO**)

Si definisce **intorno** di $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$, e si denota con $U_{(x_0,y_0)}$, un insieme contenente una palla di centro (x_0,y_0).



def. (**INTORNO DI ∞**)

Si definisce intorno di ∞, e si denota con U_∞, un insieme contenente il complementare di una palla centrata in $(0,0)$



def | (funzioni continue)

- $f: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $(x_0, y_0) \in A$ se per ogni intorno $V_{f(x_0,y_0)}$ di $f(x_0, y_0)$ $\exists$ $U_{(x_0,y_0)}$ intorno di (x_0, y_0) tale che:

$$f(x,y) \in V_{f(x_0,y_0)} \quad \forall \ (x,y) \in U_{(x_0,y_0)} \cap A$$

- $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua su A se è continua in ogni $(x_0, y_0) \in A$.

• Valgono proprietà analoghe a quelle delle funzioni in una variabile

theorema | Siano $f, g: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in (x_0,y_0). Allora

1- $(f + g)$ è continua in (x_0, y_0)

2- $(f \cdot g)$ è continua in (x_0, y_0)

3- se $f(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f(x,y)}$ è continua in (x_0, y_0)

4- (PERMANENZA DEL SEGNO) se $f(x_0, y_0) > 0$ (<0),

$$\exists \ U_{(x_0,y_0)} : f(x,y) > 0 \ (<) \quad \forall \ (x,y) \in U_{(x_0,y_0)}$$

5- ogni restrizione di f è continua in (x_0, y_0).

teorema | (CONTINUITÀ FUNZIONE COMPOSTA)

Siano $f: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to B (\subseteq \mathbb{R})$ e $g: B \to \mathbb{R}$ funzioni continue (rispet. su A e B). Allora la funzione

$g \circ f$ è **continua** su A.

corollario | • i polinomi $\varphi(x,y)$ sono continui

• le funz. razionali fratte $\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi_2(x,y)}$ sono continue

• le funz. $\ln(\varphi(x,y))$, $\sin(\varphi(x,y))$, $e^{\varphi(x,y)}$ sono tutte continue

oss | Le funzioni più comuni sono continue.

def. Un insieme si dice **LIMITATO** se $\exists$ una palla che lo contiene, **illimitato** altrimenti

def Un insieme si dice **APERTO** se è intorno di ogni suo punto, **CHIUSO** se il suo complementare è aperto

teorema (**di WEIERSTRASS**)

Una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato ha un massimo e un minimo

def Sia $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$. $(x_0, y_0) \in A$ è un punto di massimo (minimo) per f se

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall \ (x,y) \in A$$

$$\left(f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall \ (x,y) \in A \right)$$