Limiti in $\mathbb{R}^2$:

def | Un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si dice **INTERNO** ad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se $\exists$ un intorno di (x,y) contenuto in A

prop | Un insieme e' aperto $\Longleftrightarrow$ ogni suo punto e' interno

def | Un punto $(x,y) \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se in ogni intorno di (x,y) si trovano infiniti punti di A.

def | (limite per $(x,y) \to (x_0,x_0)$)

Sia $f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto di accumulazione per A.
$l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ si dice limite di f per (x,y) che tende a (x_0,y_0), e si denota con

$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)}$$

se $\forall V_l, \exists U_{(x_0,y_0)} : f(x,y) \in V_l \quad \forall (x,y) \in \left(U_{(x_0,y_0)} \setminus \{x_0,y_0\}\right) \cap A$

prop Sia $(x_0,y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ un punto di accumulazione per A, E SIA $f: A \to \mathbb{R}$.
Allora, f e' continua in $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

teorema Sia $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to B(\subseteq \mathbb{R})$ e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto di accum. per A tale che $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$. Allora:

1 - Il limite e' unico

2 - $\forall\ C \subseteq A$ tale che (x_0,y_0) e' un punto di accum. per C, si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f|_C(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{(RESTRIZIONE)}$$

3 - (PERMANENZA DEL SEGNO)

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \underset{(<0)}{>0}$, $\exists\ U_{(x_0,y_0)}$:

$$f(x,y) \underset{(<)}{>} 0 \quad \forall (x,y) \in \left(U_{(x_0,y_0)} \setminus \{(x_0,y_0)\}\right) \cap A$$

4 - (LIMITE DELLA FUNZIONE COMPOSTA)

Sia $g: B \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{z\to l} g(z) = l'$.
Allora, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (g \circ f)(x,y) = l'$

teorema (DEL DOPPIO CONFRONTO)

Siano $f, g, h : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ punto di accumulazione di A. Allora, se $g \leq f \leq h$ in un intorno di (x_0, y_0) e se $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \ell$,

~~allo~~ si ha anche $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell}$

oss Valgono i teoremi su limite della somma, del prodotto, della reciproca

def (limite per $(x,y) \to \infty$)

Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ con A illimitato. Allora, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ è il limite di f per (x,y) che tende a ∞, e si denota con

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$

se $\forall V_\ell \; \exists U_\infty : f(x,y) \in V_\ell \;\; \forall (x,y) \in U_\infty \cap A$

. Forme indeterminate:

- somma: $\lim f = +\infty$, $\lim g = -\infty$

  $\lim f+g$? $(+\infty - \infty)$

- prodotto: $\lim f = 0$, $\lim g = \pm\infty$

  $\lim f \cdot g$? $(0 \cdot (\pm\infty))$

- reciproca: $\lim f = 0$

  $\lim \frac{1}{f}$? $\left(\frac{1}{0}\right)$

notazione | Diciamo che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0^+$ $\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0^-\right)$ se $\exists\ U_{(x_0,y_0)}$:

$f(x,y) \geq 0 \quad \forall\ (x,y) \in U_{(x_0,y_0)} \cap A$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

$\left(f(x,y) \leq 0 \quad \forall\ (x,y) \in U_{(x_0,y_0)} \cap A\right)$

oss | Se $\lim f(x,y) = 0$, non necessariam. $\lim f(x,y) = 0^+$ oppure $\lim f(x,y) = 0^-$

prop | Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0^+$ (o 0^-)

allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{f(x,y)} = +\infty$ (o $-\infty$)