- Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^2$:

def | (funzione differenziabile in (x_0, y_0))

Sia $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) p.to interno di A. Si dice che f e' differenziabile in (x_0, y_0) se $\exists$ un polinomio omogeneo di 1° grado $p = p(\overset{x_0, y_0}{x, y})$ tale che:

$$\lim_{(x,y) \mapsto (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - p(x,y)}{\text{dist}\left((x,y),(x_0,y_0)\right)} = 0$$

prop | $\exists$ al più un unico polinomio p che soddisfa la proprieta' precente.

notazione | Se f e' differenziabile in (x_0, y_0), il relativo polinomio p si chiama differenziale di f in (x_0, y_0) e si indica con

$$df(x_0, y_0)$$

def Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) p.to interno di A. Si dice che f è (**parzialmente**) **derivabile** in (x_0, y_0) rispetto a x se $\exists$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

è derivabile in (x_0, y_0) rispetto a y se $\exists$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

notazione I due limiti precedenti si denotano, rispettivam., con

$$\partial_x f(x_0, y_0) \quad e \quad \partial_y f(x_0, y_0),$$

e si dicono **derivate parziali** rispetto a x, e a y, rispettiv.

teorema Sia $f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in (x_0, y_0) p.to interno di A. Allora:

(i) f e' continua in (x_0, y_0)

(ii) f e' parzialmente derivabile rispetto a x e y, e:

$$df(x_0,y_0)(x,y) = \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

OSS Il viceversa non e' vero.

Per esempio:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

OSS La parziale derivabilita' non assicura neppure la continuita' di f