teorema Siano $f, g : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ differenziabili in (x_0, y_0) p.to interno di A. Allora:

1 - $(f+g)$ è differenziabile in (x_0,y_0)

2 - $d(f+g)^{(x_0,y_0)} = df(x_0,y_0) + dg(x_0,y_0)$

$$= \left(\partial_x f(x_0,y_0) + \partial_x g(x_0,y_0)\right)(x-x_0)$$
$$+ \left(\partial_y f(x_0,y_0) + \partial_y g(x_0,y_0)\right)(y-y_0)$$

teorema Siano $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to B(\subseteq \mathbb{R})$ e $g : B \to \mathbb{R}$, differenziabili in $(x_0,y_0) \in A$ e $f(x_0,y_0)$ rispettiv.

Allora, $g \circ f$ è differenziabile in (x_0,y_0), e

$$d(f \circ g)(x_0,y_0) = g'(f(x_0,y_0))\left(\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)\right)$$

def | Sia $f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme aperto. Si dice che f è di classe C^1 su A, $f \in C^1(A)$, se f è parzialmente derivabile in ogni p.to $(x_0, y_0) \in A$ e

$$\partial_x f(x,y) \quad , \quad \partial_y f(x,y)$$

sono continue su A.

teorema | Sia $f \in C^1(A)$. Allora f è differenziabile in ogni p.to di A.

oss | Il viceversa del teorema precedente non è vero

Differenziale e derivate seconde:

def | Una funzione $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice forma quadratica se e' un polinomio omogeneo di grado 2.

def | Sia $f: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) p.to interno di A. Si dice che f e' due volte differenziabile in (x_0, y_0) se f e' differenziabile in (x_0, y_0) e $\exists$ una forma quadratica $q(x-x_0, y-y_0)$ t.c.

$$\lim_{(x,y) \mapsto (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - p(x-x_0, y-y_0) - \frac{1}{2} q(x-x_0, y-y_0)}{\operatorname{dist}((x,y),(x_0,y_0))^2} = 0$$

notazione | Se f e' 2 volte diff. in (x_0, y_0), la relativa forma quadratica $q(x-x_0, y-y_0)$ si chiama differenziale secondo di f in (x_0, y_0)