def $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice 2 volte parzialmente derivabile in (x_0, y_0), p.to interno di A, se f è parzialmente derivabile in un intorno di (x_0, y_0) e se $\partial_x f(x,y)$ e $\partial_y f(x,y)$ sono parzialmente derivabili in (x_0, y_0) rispetto a x e y.

def Se $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme aperto, è 2 volte derivabile (parz.) in ogni punto di A, e le derivate $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$, $\partial_{xx} f(x,y)$, $\partial_{xy} f(x,y)$, $\partial_{yx} f(x,y)$, $\partial_{yy} f(x,y)$ sono continue in A, allora f si dice di classe C^2 su A, e si scrive $f \in C^2(A)$.

teorema (DI SCHWARZ)

Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Allora $\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$.

teorema | Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.
Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in A$ f è 2 volte differenziabile in (x_0, y_0), e il differenziale secondo è:

$$q(x-x_0, y-y_0) = \partial_{xx} f(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2\,\partial_{xy} f(x_0,y_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + \partial_{yy} f(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2$$

corollario | Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto.
Allora, $\forall\,(x_0,y_0) \in A$ si ha:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\Big[\partial_{xx} f(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\,\partial_{xy} f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \partial_{yy} f(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big] + r_2(x,y),$$

dove:

$$r_2(x,y) = \omega_2(x,y) \cdot \mathrm{dist}\big((x_0,y_0),(x,y)\big)^2$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega_2(x,y) = 0$$

Ricerca di massimi e minimi:

def Sia $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$ p.to di accumulazione per A.
Allora, (x_0, y_0) è detto p.to di MASSIMO (MINIMO) RELATIVO per f se $\exists\, U_{(x_0,y_0)}$ tale che:

$$\boxed{f(x,y) \underset{(>)}{<} f(x_0,y_0)} \qquad \forall\, (x,y) \in \left(U_{(x_0,y_0)} \setminus \{(x_0,y_0)\}\right) \cap A$$

def Sostituendo $<(>)$ con $\leq (\geq)$ nella def. sopra si ottiene la definizione di MASSIMO (MINIMO) RELATIVO IN SENSO DEBOLE

- Si distinguono 2 casi:
  - (x_0, y_0) p.to interno ad A
  - (x_0, y_0) p.to NON interno ad A