Massimi e minimi vincolati:

def Siano $f, \varphi : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) si dice p.to di massimo (minimo) per f, vincolato a $\varphi = 0$, se è un p.to di massimo (minimo) per $f|_{\{(x,y) \in A : \varphi(x,y) = 0\}}$.

prop (metodo sostituzione). Se $\exists$ $\psi : I (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\{(x,y) \in A : \varphi(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = \psi(x)\},$$

allora $(x_0, y_0) \in A$ è p.to di estremo per f vincolato a φ se e solo se x_0 è p.to di estremo per

$$\bar{f}(x) := f(x, \psi(x))$$

prop (Metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

Siano $f, \varphi : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ parzialmente derivabile in (x_0, y_0).

Allora, se (x_0, y_0) è un punto di estremo relativo per f vincolato a $\varphi(x,y)=0$, allora si trova necessariamente fra:

a) Le soluzioni del sistema

$$\boxed{\nabla_{x,y,\lambda} F(x,y,\lambda) = 0}\,,$$ dove

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)$;

b) I punti singolari di φ, cioè le soluzioni di

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ \partial_x \varphi(x,y)=0 \\ \partial_y \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$