

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log [e^x \sqrt{y}]}{(y-3)^2}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare i segmenti non appartenenti al dominio);
- (b) stabilire quali dei punti $(2, 0)$, $(0, 3)$ e $(-1, -1)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (c) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (d) calcolare $\partial_x f(x, y)$, $\partial_{xx} f(x, y)$, e $\partial_{xy} f(x, y)$.

2. Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 5y^2.$$

3. Un prestito di 10474.10 euro viene erogato al tempo $t_0 = 0$ al tasso del 7% annuo (composto), con restituzione in tre rate rispettivamente di: 2000 euro al tempo $t_0 + 3$ mesi, 3000 al tempo $t_0 + 6$ mesi, 6000 al tempo $t_0 + 12$ mesi. Stendere l'ammortamento di tipo francese (interessi composti posticipati).

- 4. (a) Scrivere la definizione di forma quadratica definita negativa e darne un esempio;
- (b) ricavare il tasso di sconto commerciale annuo equivalente, su un periodo di tempo t , ad un tasso di interesse semplice annuo i .

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{e^{x^2+y^2} - 1}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica barrare i segmenti ed i punti non appartenenti al dominio);
- (b) stabilire quali dei punti $(2, 0)$, $(-2, -2)$ e $(0, 0)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (c) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (d) calcolare $\partial_x f(1, \sqrt{2})$.

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}.$$

sul dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, y \geq x^2\}$

3. Si consideri una rendita a rata costante R , non periodica, che garantisce il pagamento di 9 rate alle epoche $t_0 + 1$ mese, $t_0 + 4$ mesi, $t_0 + 8$ mesi, $t_0 + 16$ mesi, $t_0 + 20$ mesi, $t_0 + 24$ mesi, $t_0 + 28$ mesi, $t_0 + 32$ e $t_0 + 36$ mesi.

- a) Qual è l'ammontare della rata R , se il valore attuale $A(t_0)$ della rendita al tempo t_0 è di euro 2.000.000 secondo un tasso d'interesse composto $i = 4,25\%$ annuo?
- b) Qual è il montante della rendita al tempo $t_0 + 6$ anni e 6 mesi?
- c) Si consideri l'operazione finanziaria composta dalla riscossione della suddetta rendita, e dal versamento iniziale al tempo t_0 di un capitale pari a $A(t_0)$. Qual è l'unico TIR (annuale composto) positivo i^* della suddetta operazione finanziaria?

4. (a) Enunciare la definizione di $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ ed una condizione necessaria e sufficiente affinché

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

- (b) Enunciare la definizione di legge finanziaria scindibile e provare che la legge degli interessi semplici non lo è.

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\ln(x^2 + y^2 - 3)}{e^y(x - y)}}$$

- determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- stabilire quali dei punti $(-2, 2)$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $(2, 0)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- calcolare $\partial_x f(2, 1)$.

2. Determinare determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x, y) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 3x.$$

sul proprio dominio di esistenza, e specificare se tali estremi sono anche estremi assoluti.

3. Un'auto del valore di 13683,41 euro viene acquistata al tempo $t_0 = 0$ e pagata con le quattro rate seguenti:

- 5000 euro all'acquisto,
- 3000 a un anno dall'acquisto,
- 6000 a 3 anni dall'acquisto,
- 1000 a 3 anni e mezzi dall'acquisto.

Stendere l'ammortamento di tipo francese (interessi composti posticipati) con tasso annuale $i = 6\%$.

4. (a) Con riferimento all'esercizio 1, si dimostri che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\sqrt{2}, \sqrt{2})} f(x, y) \not\exists$$

(b) Enunciare la definizione di TIR (tasso interno di rendimento) di un'operazione finanziaria

$$\{(t_0, X_0), \dots, (t_n, X_n)\},$$

ed una condizione sufficiente affinché esista un unico TIR positivo.

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(x^2 - y + 1)}{e^{\sqrt{y-2}}}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare i segmenti non appartenenti al dominio);
- (b) stabilire quali dei punti $(0, 2)$, $(1, 2)$ e $(2, 5)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (c) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (d) calcolare $\partial_x f(x, y)$ e $\partial_y f(x, y)$.

2. Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = -x^3 - 2y^2 + 2xy.$$

3. Carolina compra un'auto, al tempo t_0 , il cui valore è X euro. Per pagarla, chiede un prestito alla banca che sarà restituito nelle tre seguenti rate:

- 2000 euro al tempo $t_0 + 6$ mesi;
- 4000 euro al tempo $t_0 + 18$ mesi;
- 4200 euro al tempo $t_0 + 30$ mesi.

Stendere l'ammortamento di tipo tedesco (interessi composti anticipati) con tasso annuale $i = 4\%$, e determinare il costo dell'auto.

4. (a) fare l'esempio di una funzione parzialmente derivabile rispetto a x e y in un punto, ma che non sia continua nel punto stesso;
- (b) Enunciare la condizione di Norstrom per l'unicità del TIR positivo per l'operazione finanziaria

$$\{(t_0, X_0), \dots, (t_n, X_n)\}.$$

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{\log(xy-1)}}{\sqrt{y-x}}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare le parti di piano appartenenti al dominio, e barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- (B) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (C) stabilire quali dei punti $(2, 2)$, $(2, 1/2)$ e $(-2, -1)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (d) Scrivere il polinomio approssimante del prim'ordine di f centrato in $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2xy + \log(x + 1)$$

sul triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

3. Si consideri una rendita a rata costante R , non periodica, che garantisce il pagamento di 5 rate alle epoche $t_0 + 2$ mesi, $t_0 + 4$ mesi, $t_0 + 6$ mesi, $t_0 + 10$ mesi e $t_0 + 12$ mesi.

- a) Qual è l'ammontare della rata R , se il valore attuale $A(t_0)$ della rendita al tempo t_0 è di euro 1.500.000 secondo un tasso d'interesse composto $i = 4,25\%$ annuo?
- b) Qual è il montante della rendita al tempo $t_0 + 2$ anni?
- c) Si consideri l'operazione finanziaria composta dalla riscossione della suddetta rendita, e dal versamento iniziale al tempo t_0 di un capitale pari a $A(t_0) + 111,12$ euro. La suddetta operazione può ammettere più di un TIR positivo? Motivare la risposta.

4. (a) Con riferimento all'esercizio 1, si dimostri che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y).$$

Indizio: si utilizzino le restrizioni

$$C_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) : x > 0, y = x + (x - 1)^2\}.$$

- (b) Scrivere la formula del montante M , come funzione di capitale iniziale C e durata dell'investimento t , in regime di capitalizzazione a interessi composti con tasso i . Ricavare poi la formula inversa che permette di scrivere la durata t come funzione di M, C e i .

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{\log(xy-1)}}{\sqrt{y-x}}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare le parti di piano appartenenti al dominio, e barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- (B) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (C) stabilire quali dei punti $(2, 2)$, $(2, 1/2)$ e $(-2, -1)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (d) Scrivere il polinomio approssimante del prim'ordine di f centrato in $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 2xy + \log(x + 1)$$

sul triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

3. Si consideri una rendita a rata costante R , non periodica, che garantisce il pagamento di 5 rate alle epoche $t_0 + 2$ mesi, $t_0 + 4$ mesi, $t_0 + 6$ mesi, $t_0 + 10$ mesi e $t_0 + 12$ mesi.

- a) Qual è l'ammontare della rata R , se il valore attuale $A(t_0)$ della rendita al tempo t_0 è di euro 1.500.000 secondo un tasso d'interesse composto $i = 4,25\%$ annuo?
- b) Qual è il montante della rendita al tempo $t_0 + 2$ anni?
- c) Si consideri l'operazione finanziaria composta dalla riscossione della suddetta rendita, e dal versamento iniziale al tempo t_0 di un capitale pari a $A(t_0) + 111,12$ euro. La suddetta operazione può ammettere più di un TIR positivo? Motivare la risposta.

4. (a) Con riferimento all'esercizio 1, si dimostri che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y).$$

Indizio: si utilizzino le restrizioni

$$C_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 1\}, \quad C_2 = \{(x, y) : x > 0, y = x + (x - 1)^2\}.$$

- (b) Scrivere la formula del montante M , come funzione di capitale iniziale C e durata dell'investimento t , in regime di capitalizzazione a interessi composti con tasso i . Ricavare poi la formula inversa che permette di scrivere la durata t come funzione di M, C e i .

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{e^{\frac{2x}{x^2+y^2-1}} - 1}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare le parti di piano appartenenti al dominio, e barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- (b) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (c) stabilire quali dei punti $(1, 1)$, $(0, 0)$ e $(-1, 0)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (d) Scrivere il differenziale f nel punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

2. Determinare massimi e minimi, relativi ed assoluti, della funzione f dell'esercizio 1, sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 < 0, x \leq 0\}.$$

3. Un'impresa emette in data $1/3/X$ un'obbligazione di durata 4 anni, con cedola fissa annua del 2.8%, e rimborso del valore nominale (100 euro) a scadenza.

- (a) Quale deve essere il prezzo di emissione per garantire un TIR del 4% composto annuo (trascurare tasse e commissioni)?
- (b) Un risparmiatore compra l'obbligazione il $10/06/X+2$ con regolamento al $15/06/X+2$, al prezzo secco di 102 euro. Se la tassazione della cedola è del 20%, qual è il prezzo tel quel?

4. (a) Con riferimento all'esercizio 1, si dimostri che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} f(x, y).$$

- (b) Con riferimento alle equivalenze fra tassi in regimi diversi di capitalizzazione, ricavare il tasso di sconto commerciale annuo d equivalente ad un tasso di interesse composto annuale i , per un investimento di durata t anni.

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\ln(y - x^2 + 1)}{(e^{x^2} - e)^2}$$

- determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare le parti di piano appartenenti al dominio, e barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- stabilire quali dei punti $(1, 2)$, $(-1, 1/2)$ e $(1, 0)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- scrivere il polinomio approssimante del prim'ordine (approssimante lineare) di f nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

sul triangolo chiuso P di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$.

3. Matteo compra oggi una moto pagandola X euro. Per pagarla, chiede un prestito alla banca concordando un rimborso attraverso le due seguenti rate:

- 2000 euro tra 6 mesi;
- 4000 euro tra 18 mesi.

- Stendere l'ammortamento di tipo tedesco (interessi composti anticipati) con tasso annuale $i = 5\%$;
- determinare il costo della moto;
- dopo 3 mesi dall'acquisto, Matteo vince la lotteria e decide di estinguere immediatamente il prestito, versando immediatamente alla banca il valore attuale della suddetta rendita ad un certo tasso j concordato con la banca. Assumendo che tale tasso sia $j = 4\%$, quanto paga Matteo per estinguere il debito anticipatamente.

4. (a) Con riferimento alla funzione $f(x, y)$ e al triangolo P dell'esercizio 2, cosa si può dire riguardo ai massimi e minimi assoluti della funzione

$$g(x, y) = e^{f(x, y)} \quad ?$$

- Denotando con $f(t)$ il fattore di montante di una certa legge di capitalizzazione, relativo ad un investimento di durata t , si dia la definizione (matematica) di legge scindibile. Si dimostri anche che la capitalizzazione secondo il regime degli interessi composti lo è mentre quella degli interessi semplici non lo è.

Nome: _____ Cognome: _____

=====

1. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(4 - y^2 - x^2)}{(y - x + 1)^2}$$

- (a) determinare il dominio (campo) di esistenza e rappresentarlo sul piano cartesiano (nella rappresentazione grafica tratteggiare le parti di piano appartenenti al dominio, e barrare eventuali linee e curve non appartenenti al dominio);
- (b) stabilire quali dei punti $(2, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ sono punti di accumulazione, e calcolare eventualmente il limite di $f(x, y)$, per (x, y) che tende ai punti suddetti;
- (c) stabilire se $A = D.E.$ è un insieme aperto, chiuso, o né aperto né chiuso, e se è limitato oppure illimitato;
- (d) calcolare $\partial_x f(0, 0)$ e $\partial_y f(0, 0)$.

2. Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^3 - xy - y^2.$$

- 3. Un prestito di 18342.84 euro viene erogato al tempo $t_0 = 0$ al tasso del 5% annuo (composto), con restituzione in tre rate rispettivamente di: 3000 euro al tempo $t_0 + 3$ mesi, 6000 al tempo $t_0 + 6$ mesi, 10000 al tempo $t_0 + 12$ mesi. Stendere l'ammortamento di tipo francese (interessi composti posticipati).
- 4.
 - (a) Scrivere la definizione di forma quadratica definita positiva e darne un esempio;
 - (b) con riferimento al regime di capitalizzazione degli interessi composti, ricavare il tasso periodale i_r equivalente al tasso annuale i , dove r rappresenta il numero di periodi in cui è diviso l'anno.