LEZIONE 9 ALGORITMO di ELIMINAZIONE di GAUSS

Permette di risolvere in modo **efficiente** un qualsiasi sistema lineare

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{---} + a_{1n}x_n = b_1 & E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{---} + a_{2n}x_n = b_2 & E_2 \\ \text{-----} & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \text{---} + a_{mn}x_n = b_m & E_m \end{cases}$$

m equaz. nelle n incognite $x_1, -, x_n$.

Una soluzione di (1) è ogni n-pla $(\lambda_1, -, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ cioè **ordinata** t.c. sostituendo λ_j ad x_j $\forall j$ in ciascuna equazione E_i questa è soddisfatta.

Se esistono soluzioni (1) si dice **compatibile** (COMPATIBILE), altrimenti si dice **INCOMPATIBILE**.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss permette di sostituire il SL (1) con un altro SL che ha le stesse soluzioni di (1) ("è **EQUIVALENTE** ad (1)"), ma è più facile da risolvere.

Questo viene fatto utilizzando ad ogni passo dell'algoritmo soltanto una delle operazioni elementari (non è permesso fare altro):

OPERAZIONI ELEMENTARI

a) **scambiare** tra di loro due equazioni

b) moltiplicare una certa equazione per un dato numero reale c, con $\underline{\underline{c \neq 0}}$

c) fissate comunque due equazioni E_i, E_h di (1), con $i \neq h$, e fissato comq un $d \in \mathbb{R}$,

$$(1)\begin{cases} \cdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i & E_i \\ \cdots \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n = b_h & E_h \\ \cdots \end{cases}$$

- si moltiplica E_h per d:

$$dE_h \qquad d(a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n) = db_h$$

- e si somma membro a membro con E_i

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + d(a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n) = b_i + db_h$$

mettendo a posto:

$$\begin{cases} \cdots \\ (a_{i1} + da_{h1})x_1 + \cdots + (a_{in} + da_{hn})x_n = b_i + db_h \\ \cdots \\ a_{h1}x_1 + \cdots + a_{hn}x_n = b_h \\ \cdots \end{cases}$$

questa è la nuova equaz. ~~[illegible]~~ i-esima

l'equazione h-esima è rimasta tale e quale

Ogni SL ottenuto a partire da (1) con le operazioni elementari a), b), c) è equivalente ad (1), cioè ha le stesse soluzioni di (1).

Basta verificarlo per ciascuna delle operazioni a), b), c).

Se faccio a) questo è ovvio.

ESEMPIO (1ª PUNTATA) 2/10/17 (3

"(1)" $\begin{cases} 2y - 3z = 15 \\ 4x + 7y + z = 13 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 4x + 7y + z = 13 \\ 2y - 3z = 15 \end{cases}$

Non è cambiato praticamente niente! Vedremo dopo il senso dell'op. elementare a).

Se faccio l'op. elementare b) sostituisco l'equazione

(2) $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

di (1) con la nuova equazione

$c(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = cb_i$ ovvero con

3) $ca_{i1}x_1 + \dots + ca_{in}x_n = cb_i$ $\underline{c \neq 0}$

Se $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ verifica la (2), cioè se

$$\underbrace{a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{b_i}_{\in \mathbb{R}} \implies \underbrace{c(a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n) = cb_i}_{\text{è verificata anche questa.}}$$

Viceversa, se è verificata l'uguaglianza

$$\underbrace{ca_{i1}\lambda_1 + \dots + ca_{in}\lambda_n}_{=} = \cancel{c}b_i$$ posso "semplificare" c perché $\underline{c \neq 0}$.

$$\cancel{c}(a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n)$$

Quindi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ è anche soluzione della (2).

Le altre equazioni del SL (1) sono rimaste le stesse. Quindi, anche facendo l'op. elementare b) si ottiene un SL equivalente ad (1).

ESEMPIO (2ª PUNTATA)

$\begin{cases} 4x + 7y + z = 13 & c = \frac{1}{4} \text{ nella } E_1 \\ 2y - 3z = 15 & c = \frac{1}{2} \text{ nella } E_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1x + \frac{7}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ 1 \cdot y - \frac{3}{2}z = \frac{15}{2} \end{cases}$

nuovo SL, equivalente al vecchio (1).

Infine, vediamo che cosa succede facendo l'operazione elementare c):

in (1) ho le due equazioni (4) $\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & E_i \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h & E_h \end{cases}$

Dopo aver fatto la c) nel SL mi trovo le equazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + d(a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n) = b_i + d b_h \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$$

Suppongo che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ sia soluzione di (4). Allora $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è anche soluzione di entrambe le (5) SPIEG.

Viceversa, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ sia soluzione delle (5). Allora è soluzione della seconda delle (4). Inoltre, da

$$a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{in}\lambda_n + d\underbrace{(a_{h1}\lambda_1 + \dots + a_{hn}\lambda_n)}_{} = b_i + d\underbrace{b_h}_{}$$

Quindi $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è anche soluzione della prima delle (4).

Le altre equazioni del SL (1) sono rimaste le stesse.

Quindi, anche facendo l'operazione elementare c) si ottiene un nuovo SL, equivalente ad (1).

ESEMPIO (3ª PUNTATA)

$$\begin{cases} x + \frac{7}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ y - \frac{3}{2}z = \frac{15}{2} \end{cases}$$ moltiplico questa per $-\frac{7}{4}$ e sommo a

$E_1 \rightsquigarrow E_1 - \frac{7}{4}E_2$ trovo $\begin{cases} x + \frac{1}{4}z + \frac{21}{8}z = \frac{13}{4} - \frac{7 \cdot 15}{8} \\ y - \frac{3}{2}z = \frac{15}{2} \end{cases}$ equiv. ad (1)

Mettendo a posto trovo il nuovo SL, equivalente ad (1)

$$(6)\begin{cases} x \quad + \frac{23}{8} z = -\frac{79}{8} \\ y - \frac{3}{2} z = \frac{15}{2} \end{cases}$$

questo sistema è facilissimo da risolvere

$$\begin{cases} x = -\frac{23}{8} z - \frac{79}{8} \\ y = \frac{3}{2} z + \frac{15}{2} \end{cases} \quad (7)$$

"z" può prendere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$. Una volta fissato il valore di z, x ed y sono <u>unici</u>.
Ho infinite soluzioni.
"z" viene detto <u>parametro libero</u>. "z" non ha niente di speciale, è venuto lui come param. libero a causa delle operazioni elementari che ho scelto di fare ad (1). Cioè:

$$\begin{cases} x \quad \frac{23}{8} z = -\frac{79}{8} \\ y - \frac{3}{2} z = \frac{15}{2} \end{cases}$$

molt. questa per $c = -\frac{2}{3}$ $(\neq 0)$

$$\begin{cases} x \quad \frac{23}{8} z = -\frac{79}{8} \\ -\frac{2}{3} y + z = -\frac{15}{3} = -5 \end{cases}$$

$E_1 \rightsquigarrow E_1 - \frac{23}{8} E_2$

$$\begin{cases} x + \frac{23}{12} y \quad = -\frac{79}{8} + \frac{5 \cdot 23}{8} = -\frac{79}{8} + \frac{115}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \\ -\frac{2}{3} y + z = -5 \end{cases}$$

stavolta il parametro libero è "y"

$$\begin{cases} x = -\frac{23}{12} y + \frac{9}{2} \\ z = \frac{2}{3} y - 5 \end{cases}$$

Ritorno alla (6). Per <u>z=0</u> trovo la soluzione $\left(-\frac{79}{8}, \frac{15}{2}, 0\right)$ questa è <u>una</u> <u>soluzione particolare</u> del SL. (1). Il SLO associato ad (1) è

$$\begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ 4x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x \quad + \frac{23}{8} z = 0 \\ y - \frac{3}{2} z = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$\left(-\frac{23}{8}z, \frac{3}{2}z, z\right) = z\left(-\frac{23}{8}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

Riscrivo (7) così

$$\underbrace{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}_{\text{sol. generale di (1)}} = \underbrace{\left(-\frac{79}{8}, \frac{15}{2}, 0\right)}_{\text{sol. particolare di (1)}} + \underbrace{z\left(-\frac{23}{8}, \frac{3}{2}, 1\right)}_{\text{sol. generale del SLO associato ad (1)}}$$

Infine $W = \left\{ z\left(-\frac{23}{8}, \frac{3}{2}, 1\right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ formato da tutte e sole le soluzioni del SLO associato ad (1)

Abbiamo già detto che tutte le informazioni di un SL (1) sono codificate nella sua matrice completa $(A|B)$. Nel nostro esempio

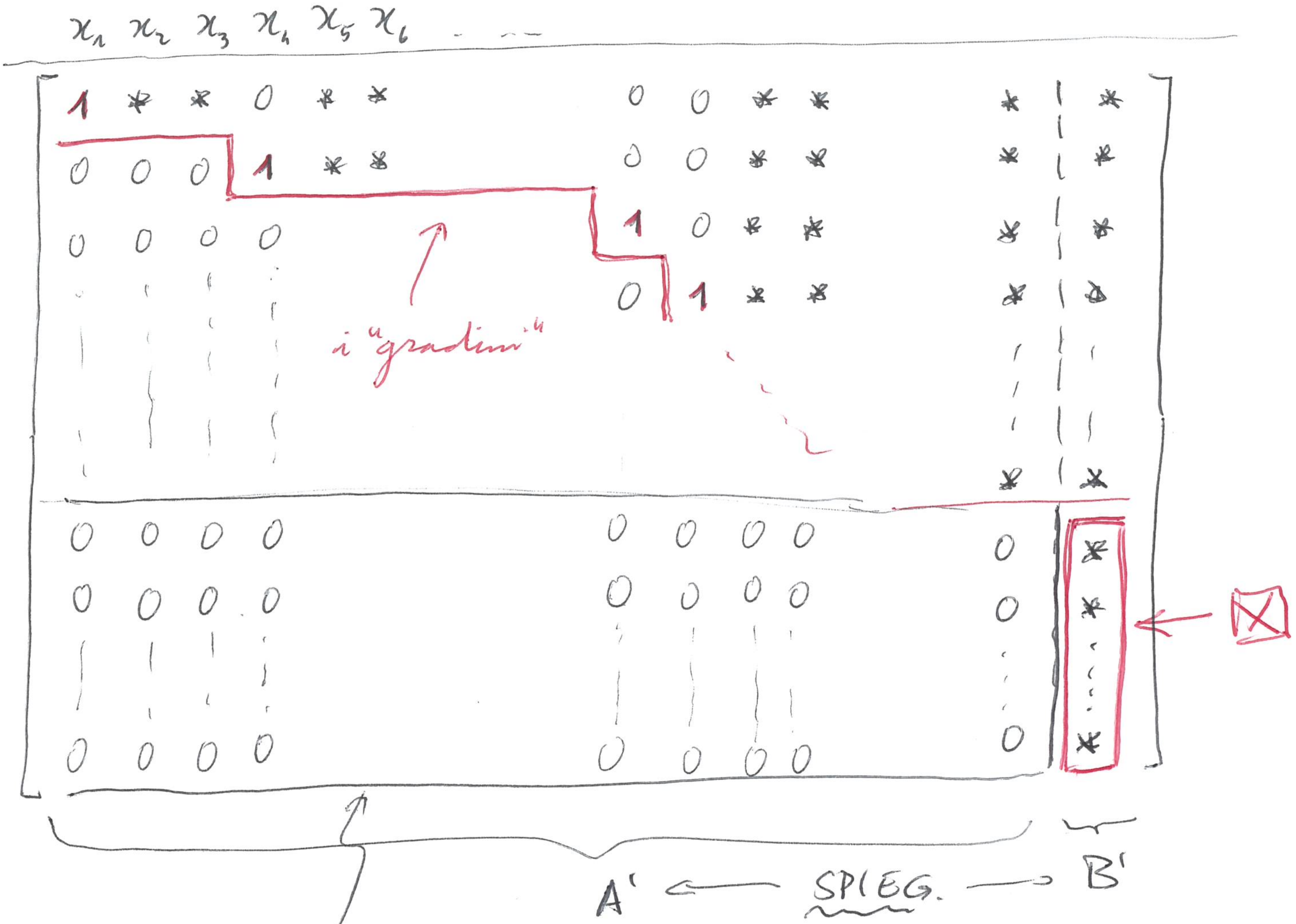
$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 14 \\ 4 & 7 & 1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{con OP. ELEM.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{23}{8} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{2} \end{array}\right)$$

A = matrice dei coefficienti

B = colonna dei termini noti

Diremo che abbiamo ottenuto con operazioni elementari a partire da (1) un S.L. "più semplice" da risolvere di (1) se la sua matrice completa è A GRADINI

Questo significa che è del seguente tipo, dove "*" indica un qualsiasi numero reale:



questa parte di A' può anche mancare, come nell'esempietto. Se c'è, è <u>tutta nulla</u>

Tale matrice verifica, cioè le seguenti condizioni

leggendo da SX a DX:

- il primo el.to non nullo di ogni riga, se c'è è $=1$. Tale elemento si chiama <u>PIVOT</u>.
- il primo el.to $\neq 0$ della $(i+1)$-unesima riga (se c'è) si trova a DX del primo el.to $\neq 0$ dell'i-esima riga. <u>SPIEGARE</u>!
- le entrate (<u>SPIEG.</u>) al di sopra di un pivot sono tutte nulle.

A questo punto:

1) Il SL (1) è compatibile $\Longleftrightarrow$ la parte $\boxtimes$ manca oppure è tutta formata da zeri.

2) Se (1) è compatibile si può dare alle indeterminate che non corrispondono a colonne di pivot dei valori <u>arbitrari</u>. Tali indeterminate si chiamano <u>parametri liberi</u> <u>COMMENTARE</u>

3) Una volta fissati i parametri liberi, le indeterminate corrispondenti ai pivot sono univocamente ... determinate (ops ...)

Supponiamo di avere r pivot.

- Se $r=n$ c'è un'unica soluzione
- Se $r<n$ vi sono infinite soluzioni che dipendono dagli $n-r$ parametri liberi.

<u>Osservazioni</u>

1) n è più importante di m
2) non è vero che se $n=m$ esistono sempre soluzioni.
3) Se (1) possiede una ed una sola soluzione, allora $m \geq n$