LEZIONE 10   **AVVISO** sulla notaz. delle matrici   3/10/17   ~~[illegible]~~   1

ESERCIZIO 1

SPIEGARE

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \quad (1) \qquad \boxed{\begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix}}$$

Prima di partire: conviene esercitare l'occhio. Se possibile, mai "dividere" quando si usa l'operazione elementare b). Vedremo il perché.

1. sommo la seconda riga alla prima

$E_1 \rightsquigarrow E_1 + E_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ \boxed{4} & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

2. sommo due volte la seconda riga alla terza riga

$E_3 \rightsquigarrow E_3 + 2 \cdot E_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

3. sommo due volte la prima riga alla seconda $E_2 \rightsquigarrow E_2 + 2E_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \circledast$$

Potrei anche dividere la seconda riga per -5, e complicarmi la vita...

4. sottraggo la terza riga dalla seconda ("d" = −1)

$E_2 \rightsquigarrow E_2 + (-1) E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

è un colpo di fortuna!

5. moltiplico la seconda riga per "c" $= -\frac{1}{5}$

$E_2 \rightsquigarrow \left(-\frac{1}{5}\right) E_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

6. sommo alla prima riga la seconda moltiplicata per "d" = 2 $E_1 \rightsquigarrow E_1 + 2E_2$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & \ y & \ z & \ \ TN \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \quad (2)$$

Quindi il SL (1) è equivalente al SL

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Dunque in questo caso c'è <u>un'unica soluzione</u> $(x, y, z) = (2, 1, 4)$

Osservando la matrice a scalini (2) vediamo che (...)

- manca la zona $\boxtimes$, dunque il SL (1) è compatibile
- ci sono 3 pivot
- non ci sono "parametri liberi".
- quindi il numero delle soluzioni è $\left(\infty^{\overset{\#\text{ indeterminate}}{n} - \#\text{PIVOT}}\right)$

  $\underbrace{\infty^{3-3} = \infty^0 = 1}_{\text{è solo CONVENZIONALE !!!!}}$ unica soluzione.

OSSERVAZIONE

Dal punto di vista del "trovare le soluzioni" ci si poteva fermare al punto ⊛: la terza equazione permetteva di trovare z in modo unico. Una volta determinato z, la seconda equaz. permetteva di trovare y in modo unico. Trovati z ed y, ...

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ \boxed{5}x + y - z = 1 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

ancora $m = 3$, $n = 3$ cioè un SL di tre equazioni in tre incognite.

1) [redacted]

$E_2 \rightsquigarrow E_2 + (-5)E_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -11 & -4 \\ \boxed{4} & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

2) [redacted]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -11 & -4 \\ 0 & \boxed{-9} & -11 & -3 \end{array}\right)$$

$E_3 \rightsquigarrow E_3 + (-4)E_1$

$E_3 \rightsquigarrow E_3 + (-1) E_2$ 3/10/17 [redacted]

3) sommo alla terza riga la seconda riga moltiplicata per -1

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \vline & 1 \\ 0 & -9 & -11 & \vline & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 1 \end{pmatrix}$$

TN

Questa riga mi dice che il SL è <u>incompatibile</u>. <u>È inutile andare</u> avanti: il SL (1) non ha soluzioni.

ESERCIZIO 3

$$1)\ \begin{cases} x - 2y + 3z - 4w = 4 \\ x - y + 2z - 3w = 1 \\ 3x - 4y + 7z - 10w = 6 \end{cases}$$

$m = 3$
$n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vline & 4 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & -3 & \vline & 1 \\ 3 & -4 & 7 & -10 & \vline & 6 \end{pmatrix}$$

1) $R_2 \rightsquigarrow R_2 + (-1) R_1 = R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vline & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vline & -3 \\ \boxed{3} & -4 & 7 & -10 & \vline & 6 \end{pmatrix}$$

2) $R_3 \rightsquigarrow R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vline & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vline & -3 \\ 0 & \boxed{+2} & -2 & 2 & \vline & -6 \end{pmatrix}$$

3) $R_3 \rightsquigarrow R_3 - 2R_2$

i pivots

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boxed{-2} & 3 & -4 & \vline & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & \vline & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}$$

4) $R_1 \rightsquigarrow R_1 + 2R_2$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & \vline & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vline & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -z + 2w - 2 \\ y = z - w - 3 \end{cases}$$

z, w sono parametri liberi

"n − # PIVOTS" $= 4 - 2 = 2$ il sist. ha ∞^2 soluzioni

La soluzione generale del SL è

$(-z + 2w - 2,\ z - w - 3,\ z,\ w) =$

sol. GENERALE del SL OMOGENEO associato ad (1) 3/10/17 (3,5

$$= \underbrace{(-2,-3,0,0)}_{\text{sol. PARTICOLARE del SL (1), ottenuta ponendo } z=w=0} + \overbrace{z(-1,1,1,0)+w(2,-1,0,1)}^{\text{sol. GENERALE del SL OMOGENEO associato ad (1)}}$$

la "leggo" qui

Cioè se considero il SLO (confrontatelo con (1))

$$\begin{cases} x-2y+3z-4w=0 \\ x-y+2z-3w=0 \\ 3x-4y+7z-10w=0 \end{cases}$$

l'insieme di <u>tutte</u> le sue soluzioni è un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 2, visto che una base di W è data da $(-1,1,1,0),(2,-1,0,1)$. Osservo che

$$\boxed{\dim(W) = \#\text{ parametri liberi}}$$

La matrice dei coeff. è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

le sue righe generano un sottosp. T di $\mathbb{R}^4$. Una base di T è data da $(1,0,1,-2),(0,1,-1,1)$

<u>Quindi</u> $\dim(T)=2$

Le colonne di A generano un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$.

Osservo che

$$\begin{vmatrix}3\\2\\7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\\1\\3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-2\\-1\\-4\end{vmatrix} \leftarrow (\text{cioè } C_3 = C_1 - C_2)$$

e

$$(\text{cioè } C_4 = -2C_1 + C_2) \rightarrow \begin{vmatrix}4\\-3\\-10\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1\\1\\3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2\\-1\\-4\end{vmatrix}$$

C_1, C_2 sono LIN. INDIP. Dunque $\dim(U)=2$

$\dim(U)$ è il massimo numero di <u>colonne</u> di A che sono linearmente indipendenti: <u>rg(A)</u>

$\|$

$\dim(T)$ che è il massimo numero di <u>righe</u> di A che sono linearmente indipendenti

ESERCIZIO 4

$k \in \mathbb{R}$ parametro $\leftarrow$ NON LIBERO!!!

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ -kx + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} m=2 \\ n=2 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ \boxed{-k} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

① $R_2 \rightsquigarrow R_2 + k R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1+k^2 & 1+k \end{array}\right)$$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha $1+k^2 > 0$ $\quad (k^2 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ (1+k^2)\, y = 1+k \end{cases} \qquad y = \frac{1+k}{1+k^2} \qquad x = 1 - ky = 1 - \frac{k+k^2}{1+k^2} =$$

$$= \frac{1+\cancel{k^2}-k-\cancel{k^2}}{1+k^2} = \frac{1-k}{1+k^2}$$

Il sistema è compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$, ed ammette un'unica soluzione.

ESERCIZIO 5 SALTARE

$k \in \mathbb{R}$, parametro

$$\begin{cases} 2x + ky = 2 \\ kx + 2y = k \\ ky + kz = k \end{cases} \qquad \begin{matrix} m=3 \\ n=3 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ \boxed{k} & 2 & 0 & k \\ 0 & k & k & k \end{array}\right)$$

① $R_2 - \frac{k}{2} R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 2-\frac{k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array}\right)$$

che fare

k è "più semplice" di $2 - \frac{k^2}{2}$: prendo k come bandolo della matassa.

Se $\boxed{k=0}$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ & & \downarrow \text{ param. libero} & \\ \end{array}$$

(2) $\frac{1}{2}R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ il SL è compatibile

$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z \text{ è libero} \end{cases}$ la soluzione generale è $(1, 0, z)$ COMMENTARE

Se $\boxed{k \neq 0}$ (2) $R_3 \rightsquigarrow k^{-1} R_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 2-\frac{k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(3) $R_2 \longleftrightarrow R_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\frac{k^2}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$

oppure $2 - \frac{k^2}{2} = \frac{4-k^2}{2} = \frac{(2-k)(2+k)}{2}$

quindi $2 - \frac{k^2}{2} = 0 \iff k=2$ oppure $k=-2$

Allora, se $\boxed{k \neq 0, 2, -2}$

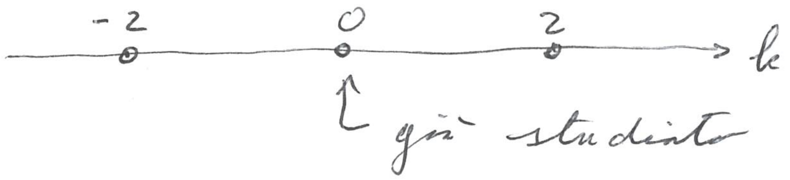
(3) $\left(2-\frac{k^2}{2}\right)^{-1} R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right)$

(4) $R_3 - R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{k} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(5) $R_1 - kR_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

(6) $\frac{1}{2}R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Quindi se $\forall k \neq 0, 2, -2$, allora la soluzione <u>esiste</u> ed è <u>unica</u> $\quad (x, y, z) = (1, 0, 1)$



I casi $k = 2$ e $k = -2$ si studiano separatamente.

$\boxed{k=2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \text{compatibile}$$

$x \quad y \quad z \leftarrow$ param. libero

La soluzione generale è $(z, -z+1, z) =$

$\boxed{k=-2}$: a loro

$= \underbrace{(0,1,0)}_{\text{per } z=0} + z(1,-1,1)$

<u>PROBLEMA</u> Esistono sistemi lineari (in due incognite) che hanno $(1,4), (-2,7)$ tra le soluzioni?

$ax + by = c \qquad$ generica equazione lineare in due incognite.

Devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 4 = c \\ a(-2) + b \cdot 7 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ -2a + 7b - c = 0 \end{cases}$$

SL <u>OMOGENEO</u>

SPIEG.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ \boxed{-2} & 7 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_2 \rightsquigarrow R_2 + 2R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -3 & 0 \end{array}\right)$ $R_2 \rightsquigarrow -\frac{1}{3}R_2$ $\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}}$

perché incaponirsi a voler avere un pivot qui a tutti i costi?

$$\begin{array}{ccc|c} a & c & b & TN \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \qquad R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2 \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & c & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

pivots

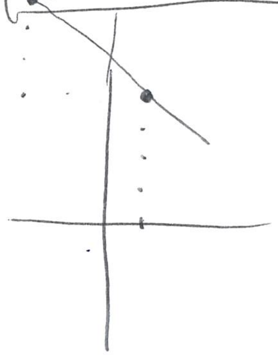
b parametro libero

$$\begin{cases} a = b \\ c = 5b \end{cases} \qquad b = 1 \Rightarrow a = 1 \quad c = 5 \qquad \underline{\underline{x + y = 5}}$$

$m = 1$

$n = 2$

$\boxed{y = -x + 5}$ l'equazione di una retta



PROBLEMA Esistono sistemi lineari che hanno $(1,0,2)$, $(1,1,1)$, $(2,-1,0)$ tra le soluzioni?

$ax + by + cz = d$ a, b, c, d devono soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 2 = d \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = d \\ a \cdot 2 + b(-1) + c \cdot 0 = d \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ a + b + c - d = 0 \\ 2a - b - d = 0 \end{cases}$$

SL omogeneo

SL nelle incognite a, b, c, d.

Un SL omogeneo ha sempre almeno la <u>soluz. banale</u> $(0, 0, \dots, 0)$. Quindi <u>la cosa interessante è vedere se ha soluzioni NON banali.</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

non scrivo la colonna TN perché è <u>inutile</u> per un SL omogeneo.

$$\begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 + R_2 \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a & \quad b & \quad c & \quad d \end{matrix} \end{array}$$

la lascio in pace

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & \quad b & \quad d & \quad c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} a = d - 2c \\ b = c \\ d = 5c \end{cases}$$

pivots

c è param. libero

$$\boxed{c = 1 \Rightarrow \quad d = 5 \quad b = 1 \quad a = 3}$$

$$\boxed{3x + y + z = 5}$$