ESERCIZI VARI su SISTEMI di EQUAZIONI LINEARI

Si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

SISTEMI LINEARI

Esercizio 1. Risolvere mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} & X_2 & +2X_3 & +3X_4 & = & 0 \\ X_1 & +2X_2 & +3X_3 & +4X_4 & = & 0 \\ 2X_1 & +3X_2 & +4X_3 & +5X_4 & = & 0 \\ 3X_1 & +4X_2 & +5X_3 & +6X_4 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6X_1 & +6X_2 & +2X_3 & -2X_4 & = & 2 \\ -9X_1 & +8X_2 & +3X_3 & -2X_4 & = & 3 \\ -3X_1 & +2X_2 & +X_3 & & = & 1 \\ -15X_1 & +14X_2 & +5X_3 & -4X_4 & = & 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 & +3X_2 & -X_3 & +4X_4 & = & 0 \\ 2X_1 & +5X_2 & -X_3 & +3X_4 & = & -1 \\ 4X_1 & -3X_2 & & +X_4 & = & 0 \\ -3X_1 & +X_2 & -5X_3 & -2X_4 & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 & +3X_2 & -4X_3 & +3X_4 & = & 9 \\ 3X_1 & +9X_2 & -2X_3 & -11X_4 & = & -3 \\ 4X_1 & +12X_2 & -6X_3 & -8X_4 & = & 6 \\ 2X_1 & +6X_2 & +2X_3 & -14X_4 & = & -12 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & = & -1 \\ x & -2y & = & 1 \\ 5x & +2y & = & -3 \\ 7x & -2y & = & -1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si risolva mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & -2y & +2z & = & 1 \\ 5x & +2y & +3z & = & -3 \\ 7x & -2y & +4z & = & -1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Risolvere mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss il seguente sistema lineare, dato in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Esercizio 5. Trovare mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} 2X_1 & -8X_2 & +X_3 & -X_4 & = & 11 \\ 5X_1 & -20X_2 & -4X_3 & -22X_4 & = & 21 \\ X_1 & -4X_2 & -6X_3 & -20X_4 & = & -1 \\ -3X_1 & +12X_2 & +5X_3 & +kX_4 & = & -10 \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 6. Determinare mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare è compatibile, e trovarne la soluzione generale

$$\begin{cases} 2X_1 & -8X_2 & +X_3 & +11X_4 & = & -1 \\ 5X_1 & -20X_2 & -4X_3 & +21X_4 & = & -22 \\ -3X_1 & +12X_2 & +5X_3 & -10X_4 & = & k \end{cases}$$

Esercizio 7. Trovare mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} 2x & +ky & = & 2 \\ kx & +2y & = & k \\ kx & +ky & = & k \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni. Fare lo stesso per il sistema lineare

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 3 \\ 3x & +y & +5z & = & 5 \\ x & & +2z & = & k \end{cases}$$

Esercizio 8. Trovare mediante l' algoritmo di eliminazione di Gauss per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} x & +(k-1)y & +z & = & 1 \\ (2k-3)x & +y & +(k-1)z & = & 3-k \\ 2x & +ky & +kz & = & k \\ kx & +2y & +(2k-2)z & = & 4-k \end{cases}$$

Per ciascuno di tali valori di k trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 9. Determinare per quali valori del parametro t il sistema lineare dato in forma matriciale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

è compatibile. Per ciascuno di tali valori di t trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare col metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 3x & +2y & +4z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & 1 \end{cases}$$

Esercizio 11. Studiare il seguente sistema lineare a coefficienti reali, in funzione del parametro λ:

$$\begin{cases} x & +2y & +z & +t & = & 0 \\ 2x & +\lambda y & & & = & 0 \\ & y & +z & +2t & = & 0 \\ 3x & +2y & z & +t & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 12. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, in cui sia stata fissata una base $\mathscr{B}$. Sia W il sottospazio generato dai vettori di coordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ e $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -2, 1)$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sottospazio U_k di V, definito dall'equazione $x_1 - x_2 + kx_3 = 0$. Determinare, al variare di k, una base di $U_k \cap W$ ed una per $U_k + W$.

Esercizio 13. Trovare, se esistono, i polinomi $p(X)$ di grado 3 a coefficienti reali, che prendono i valori $0, -4, 5, -15$ rispettivamente per $X = 1, -1, 2, -2$.

Esercizio 14. Discutere il seguente sistema lineare a coefficienti reali, nel parametro reale m

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m+2 \end{cases}$$

Esercizio 15. Si risolvano i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 9z &= 1 \end{cases} \qquad 3x+2y+z-t = 2 \qquad \begin{cases} 3x + 4y - z - 3t &= 2 \\ x + y - z - 2t &= 0 \\ x - y + z + 4t &= 2 \\ x - y - z + t &= 2 \end{cases}$$

Esercizio 16. Si consideri un generico sistema lineare omogeneo di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \end{cases}$$

e si supponga che il rango della matrice dei coefficienti sia 2. Si dimostri che le soluzioni di tale sistema sono tutte e solo le terne proporzionali a

$$\left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$