Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Navale ed Ingegneria Industriale

Programma del corso di

GEOMETRIA

Anno Accademico 2016-2017
Prof. Dario Portelli

In questo programma ho cercato di raggruppare *per tema* i vari argomenti trattati nel corso, piuttosto che secondo l' ordine *cronologico*, nel quale sono stati presentati a lezione.

1.- Nozioni di Algebra.

Richiami sulle proprietà algebriche del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

2.- Spazi vettoriali. Sottospazi. Dimensione.

Concetto di spazio vettoriale (sul campo dei numeri reali).
$0_{\mathbb{R}} \cdot v = 0_V$ per ogni vettore v e $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ per ogni numero reale λ.
Primi esempi: $\mathbb{R}^n$; l' insieme $\mathbb{R}[x]$ di tutti i polinomi in una sola indeterminata x, a coefficienti reali.

Sottospazio vettoriale. Il vettore nullo appartiene ad ogni sottospazio vettoriale.
L' intersezione di sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio vettoriale.
L' unione di due sottospazi vettoriali non è, in generale, un sottospazio vettoriale.
Somma di due sottospazi di uno spazio vettoriale.
La somma è ancora un sottospazio vettoriale.
La somma di due sottospazi di V è il più piccolo sottospazio di V (rispetto all' inclusione $\subset$), che li contiene entrambi.

Combinazioni lineari di vettori.
Span di una fissata famiglia $\mathcal{F}$ di vettori di uno spazio vettoriale V. $Span(\mathcal{F})$ è un sottospazio vettoriale di V.
Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale.
Sistemi di generatori minimali rispetto all' inclusione.
Se G è un sistema di generatori minimale per V, allora ogni elemento di V si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di G.
Non è possibile generare lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una sola indeterminata, a coefficienti reali, con un numero finito di elementi.

Famiglie di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale.
Un sistema di generatori minimale per V è formato da vettori linearmente indipendenti.
Caratterizzazione dell' indipendenza lineare in termini di Span.
Teorema dello scambio (con dimostrazione).
Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V, massimale rispetto all' inclusione, è un sistema di generatori di V.
Basi di uno spazio vettoriale.
Due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.
Dimensione di uno spazio vettoriale.
Da ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale si può estrarre una base.
Teorema del completamento ad una base : ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale si può completare in una base.
Se $W \subseteq V$ è un sottospazio, allora $dim(W) \leq dim(V)$. Inoltre, se $dim(W) = dim(V)$ allora $W = V$.
Formula di Grassmann per due sottospazi vettoriali U, W di uno spazio V.
Unicità delle componenti di un qualsiasi elemento di $U + W$ nel caso in cui si abbia $U \cap W = \{0\}$.

3.- Matrici.

Matrici e nomenclatura relativa.
Operazioni con le matrici. Spazio vettoriale di tutte le matrici di un tipo fissato, sua dimensione, base canonica.

Definizione del prodotto righe per colonne di due matrici.
Le matrici identiche si comportano come elementi neutri rispetto al prodotto righe per colonne.
Il prodotto righe per colonne non è commutativo, ma è associativo e valgono le proprietà distributive a destra, ed a sinistra.
Matrici elementari.
Effetto della moltiplicazione righe per colonne a destra ed a sinistra per una matrice elementare dei vari tipi.
Matrice trasposta. Sue proprietà formali :
$(A^t)^t = A \qquad (AB)^t = B^t A^t$
Matrici (quadrate) simmetriche e matrici antisimmetriche; loro caratterizzazione mediante il concetto di matrice trasposta.
Basi per gli spazi vettoriali di matrici simmetriche ed antisimmetriche.

Matrici invertibili.
Il prodotto di due matrici invertibili è ancora invertibile.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Varie caratterizzazioni di una matrice invertibile (senza usare il determinante).
Algoritmo per calcolare l' inversa di una matrice, qualora esista.
Ogni matrice elementare è invertibile.
Se una matrice invertibile è simmetrica, allora la sua inversa è simmetrica.
Caratterizzazione delle matrici 2×2 invertibili.
La trasposta di una matrice invertibile A è anch' essa invertibile, ed ha per inversa la trasposta dell' inversa di A.
Se A è una matrice quadrata $n \times n$ per la quale esiste una matrice B tale che AB è la matrice identica, allora A è invertibile, e la sua inversa è B.
Se una matrice quadrata contiene una colonna tutta formata da zeri, allora non è invertibile.
Riduzione "PAQ" di un' arbitraria matrice A, di tipo $m \times n$, dove P e Q sono matrici invertibili.

4.- Applicazioni lineari.

Definizione di un' applicazione lineare.
Un' applicazione lineare manda il vettore nullo del dominio nel vettore nullo del codominio.
Nucleo ed immagine di un' applicazione lineare $f : U \to V$.
$Ker(f)$ ed $Im(f)$ sono sottospazi vettoriali di U e V rispettivamente.
Un' applicazione lineare è iniettiva se e solo se il nucleo è banale.
Teorema di dimensione per un' applicazione lineare: se $f : U \to V$ è lineare, allora $dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$.
La composizione di due applicazioni lineari è ancora lineare.
Teorema di determinazione di un' applicazione lineare.
Controimmagini. In particolare, controimmagini rispetto ad un' applicazione li- neare.
Matrice associata ad un' applicazione lineare rispetto a date basi degli spazi dominio e codominio.
La matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto righe per colonne delle matrici associate alle singole applicazioni lineari.
Matrici di cambiamento di base.

Applicazioni lineari biiettive; la loro applicazione inversa è ancora lineare. Isomorfismi.
Due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
Caratterizzazioni degli isomorfismi tra due spazi vettoriali della stessa dimensione (finita).

Rango per righe e rango per colonne di una matrice.

Teorema del rango: il rango per righe di una matrice è uguale al suo rango per colonne.

5.- Sistemi lineari.

Sistemi di equazioni lineari. Soluzioni. Sistemi lineari omogenei.
L' insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
Se un sistema lineare omogeneo ha meno equazioni che incognite, allora ammette soluzioni non banali.
Teorema di Rouche-Capelli sulla compatibilità di un sistema lineare (solo qualitativo).
Teorema di struttura per le soluzioni di un sistema lineare: la soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare del sistema e della soluzione generale del sistema lineare omogeneo associato.

Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema lineare.
Modificando un sistema lineare mediante operazioni elementari sulle equazioni si ottiene un sistema lineare equivalente a quello di partenza.
Matrici a gradini, pivot delle stesse.
Se M è una matrice a gradini, quadrata, allora o M è la matrice identica, o l' ultima riga di M è nulla.
Algoritmo di eliminazione di Gauss, cioè risoluzione di un sistema lineare la cui matrice completa è a gradini.
Qualche precisazione sull' algoritmo di eliminazione di Gauss dal punto di vista del prodotto di matrici.
Sistemi lineari scritti in forma matriciale. Teorema di Cramer.

6.- Determinanti.

Il determinante per matrici 1×1 e 2×2. Significato "geometrico" del determinante di una matrice 2×2.
Definizione per induzione ("definizione ricorsiva") del determinante di una matrice quadrata.
Il determinante di ogni matrice identica è 1.
Se A ha una riga nulla, allora $det(A) = 0$.
La funzione determinante è lineare rispetto a ciascuna riga della matrice A.
Se due righe adiacenti di una matrice A sono uguali, allora $det(A) = 0$.
Se la matrice A' è stata ottenuta scambiando tra loro due righe qualsiasi di una matrice A, allora $det(A') = -\,det(A)$.
Se una matrice quadrata A ha due qualsiasi righe uguali, allora $det(A) = 0$.
Aggiungendo ad una fissata riga di una matrice quadrata A un multiplo qualsiasi di un altra riga il determinante non cambia.
Calcolo dei determinanti delle matrici elementari di ogni tipo.

Lemma: se A è una qualsiasi matrice $n \times n$, e se E è una matrice elementare $n \times n$, allora $det(EA) = det(E)det(A)$.
Teorema di Binet (con dimostrazione).
Se d è una funzione reale definita nell' insieme di tutte le matrici $n \times n$, che è lineare rispetto a ciascuna riga (o colonna) di A, alternante rispetto alle righe (risp.: alle colonne), e vale 1 sulla matrice identica, allora $d = det$.
Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $det(A) \neq 0$.
Se A è invertibile, allora $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$.
Se AB è invertibile, allora sia A che B sono invertibili.
Determinante della matrice trasposta.
Regola di Sarrus.
Formula di Cramer.

7.- Diagonalizzazione di un endomorfismo.

Definizione di autovettore ed autovalore di un endomorfismo $f : V \to V$.
Polinomio caratteristico della matrice associata ad un endomorfismo f rispetto ad una fissata base di V.
Matrici associate allo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse di V sono simili.
La relazione di similitudine tra matrici quadrate è una relazione d' equivalenza.
Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
Significato di alcuni coefficienti del polinomio caratteristico.
Molteplicità algebrica di una radice di un dato polinomio.
Richiami sulla divisione con resto tra polinomi.

Spazio vettoriale $Hom_{\mathbb{R}}(U, V)$ di tutte le applicazioni lineari $U \to V$, dove U, V sono spazi vettoriali reali, di dimensione rispettivamente n ed m.
Isomorfismo lineare tra $Hom_{\mathbb{R}}(U, V)$ e lo spazio di tutte le matrici $m \times n$.
Autospazi. Molteplicità geometrica di un autovalore.
Per ogni autovalore di un endomorfismo, la molteplicità geometrica è $\leq$ della molteplicità algebrica dello stesso.
Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Matrici diagonali.
Diagonalizzabilità di un endomorfismo.
Esempi di endomorfismi che non sono diagonalizzabili.
Un endomorfismo $f : V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V tutta costituita da autovettori per f.
Condizione necessaria e sufficiente affinchè un endomorfismo $f : V \to V$ sia diagonalizzabile è che il polinomio caratteristico abbia tutte le sue radici in $\mathbb{R}$, ed, inoltre, per ogni autovalore di f le molteplicità algebrica e geometrica coincidano.

Se il polinomio caratteristico di $f : V \to V$ ha $n = dim(V)$ radici distinte in $\mathbb{R}$, allora f è diagonalizzabile.

8.- Elementi di geometria affine negli spazi di dimensione 2 e 3.

Definizione di retta (in termini di algebra lineare).
Direzione di una retta.
Rette parallele.
Definizione di piano.
Giacitura di un piano.
Piani paralleli.
Parallelismo tra una retta ed un piano.

Equazioni parametriche per la retta ed il piano.
Equazioni cartesiane per un piano.
Intersezione di due piani.
Ogni retta è l' intersezione di due qualsiasi piani distinti che la contengono.
Significato geometrico delle equazioni cartesiane per una retta.
Fascio (proprio ed improprio) di piani.
Intersezione di tre piani.
Posizione reciproca di un piano ed una retta.
Posizione reciproca di due rette nello spazio.
Condizioni imposte a rette e piani.

9.- Prodotti scalari.

Definizione di prodotto scalare.
Esempio: il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.
Esempio di un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$, diverso dallo standard.
Vettori ortogonali.
Norma di un vettore; versori.
Espressione del prodotto scalare standard in termini delle norme dei vettori implicati, e dell' angolo (convesso) da essi formato.
Basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.
Sottospazio ortogonale ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
Dimensione dell' ortogonale $W^\perp$ di un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$.
Varie proprietà formali del passaggio al sottospazio ortogonale.
Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di W e di $W^\perp$.
Proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ su un suo sottospazio W.
Vettori a due a due ortogonali sono linearmente indipendenti.
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Angolo convesso tra due vettori rispetto ad un arbitrario prodotto scalare.
Teoremi del coseno e di Pitagora.
Disuguaglianza triangolare.

Matrici ortogonali.
A è ortogonale se e solo se le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard.
A è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard.
Il prodotto righe per colonne di due matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.
Se A è una matrice ortogonale, allora anche ${}^{\mathbf{t}}A$ lo è.
Il determinante di una matrice ortogonale è ± 1.
Classificazione delle matrici ortogonali 2×2.

Endomorfismi ortogonali.

10.- Geometria affine metrica.

Ortogonalità tra due rette, tra due piani, tra un piano ed una retta.
Distanza tra due punti.
Distanza tra due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. In particolare, distanza tra un punto ed un piano (con formula esplicita), e tra due rette.

Interpretazione dell' equazione cartesiana di un piano in R^3 in geometria metrica.
Risoluzione ai minimi quadrati di un sistema lineare incompatibile. Suo significato geometrico.

10.- Isometrie di $\mathbb{E}^n$.

Lo spazio metrico $\mathbb{E}^n$.
Definizione di isometria di $\mathbb{E}^n$.
Ogni isometria è iniettiva. La composizione di due isometrie è ancora un' isometria.
Ogni isometria è un' applicazione affine (solo enunciato).
L' applicazione lineare f_* sottogiacente ad un' isometria conserva il prodotto scalare.
La matrice che rappresenta f_* rispetto ad una base ortonormale è una matrice ortogonale.
Esempi di isometrie: le traslazioni, le rotazioni attorno ad un asse (in $\mathbb{E}^3$), le simmetrie ortogonali rispetto ad un piano (in $\mathbb{E}^3$), oppure ad una retta (in $\mathbb{E}^2$).
Punti fissi.
Se un' isometria di $\mathbb{E}^3$ (di $\mathbb{E}^2$) è diversa dall' applicazione identica, allora i suoi eventuali punti fissi sono tutti contenuti in un dato piano (in una data retta).
Se un' isometria f di $\mathbb{E}^3$ (di $\mathbb{E}^2$) ha quattro punti uniti non complanari (ha tre punti uniti non allineati), allora f è l' applicazione identica.

Ogni isometria del piano si ottiene componendo al più tre simmetrie ortogonali rispetto a rette.
Glissosimmetrie.
Isometrie dirette ed inverse, qualche semplice esempio.
Teorema di Eulero sulle isometrie dirette di $\mathbb{E}^3$, diverse dall'applicazione identica, dotate di un punto fisso.
Rototraslazioni.

11.- Forme bilineari

Definizione di forma bilineare, in particolare forma bilineare simmetrica.
Formula di polarizzazione.
Matrice associata ad una forma bilineare su V rispetto ad una base fissata di V.
Tale matrice individua completamente la forma bilineare di partenza.
Relazione tra le matrici che rappresentano rispetto a basi diverse la stessa forma bilineare.
Matrici congruenti.
La congruenza è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le matrici quadrate $n \times n$.
Due matrici $n \times n$ rappresentano rispetto a basi diverse la stessa forma bilineare su V se e solo se sono congruenti.
Due matrici congruenti hanno lo stesso rango. Rango di una forma bilineare.
Forme bilineari non-degeneri e degeneri.
Se $b : VxV \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare non-degenere, allora per ogni vettore v non nullo esiste un vettore w tale che $b(v, w)$ è non nullo.
Vettori ortogonali rispetto ad una forma bilineare simmetrica.
Sottospazio ortogonale.
Vettori isotropi.
Se v è un vettore non isotropo rispetto alla forma bilineare b, si ha che V è la somma diretta di $Span(v)$ con il suo sottospazio ortogonale.

12.- Prodotti scalari hermitiani e nozioni correlate

Definizione di prodotto scalare hermitiano.
Il prodotto scalare hermitiano standard in $\mathbb{C}^n$.
Spazi vettoriali unitari.
Norma e sue proprietà.
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Ortogonalità tra vettori e tra sottospazi.
Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, e sue conseguenze.
Dimensione dell'ortogonale di un sottospazio.
Formula di polarizzazione.

Endomorfismi unitari e loro principali proprietà.
Matrici unitarie e loro proprietà (in analogia alle proprietà delle matrici ortogonali).
Determinante delle matrici unitarie.
La matrice che rappresenta un endomorfismo unitario rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ è unitaria.

13.- Endomorfismi autoaggiunti per spazi euclidei o unitari.

Endomorfismo aggiunto ad un dato endomorfismo F di uno spazio euclideo od unitario V.
Sua esistenza ed unicità.
Se F è rappresentato rispetto ad una base ortonormale di V dalla matrice A, allora il suo endomorfismo aggiunto è rappresentato dalla matrice ${}^{\mathbf{t}}\bar{A}$.
Vantaggi di diagonalizzare un endomorfismo autoaggiunto utilizzando esclusivamente matrici ortogonali, risp. unitarie.

14.- Teoremi spettrali.

Teorema spettrale per endomorfismi autoaggiunti di uno spazio unitario.
Tutti gli autovalori di un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio unitario sono reali.
Se u, v sono autovettori relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio unitario, allora u e v sono ortogonali tra loro.
Teorema spettrale (su $\mathbb{C}$) in forma matriciale: per ogni matrice hermitiana A, di tipo $n \times n$, esiste una matrice $n \times n$ unitaria P tale che ${}^{\mathbf{t}}PAP$ sia diagonale.

Tutte le radici del polinomio caratteristico di una matrice simmetrica sono reali.
Teorema spettrale per endomorfismi autoaggiunti di uno spazio euclideo.
La matrice di cambiamento di base tra due basi ortonormali di uno spazio euclideo è ortogonale.
Teorema spettrale per matrici reali simmetriche.
Caratterizzazione delle matrici simmetriche reali che determinano un prodotto scalare.

Diagonalizzazione di matrici reali simmetriche.
Ogni matrice reale simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.
Teorema di Sylvester. Segnatura.
Regola di Cartesio (solo enunciato).
Determinazione di rango e segnatura di una matrice reale simmetrica mediante il polinomio caratteristico.

15.- Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.

Definizione sintetica di tale prodotto.
"Regola della mano destra".
Il prodotto vettoriale è anti-commutativo, e non è associativo.
Il prodotto vettoriale in coordinate.
Bilinearità del prodotto vettoriale.
Prodotto misto di tre vettori di $\mathbb{R}^3$.

16.- Coniche.

Generalità sulle coniche affini.
Loro equazione cartesiana.
Matrice 3×3 simmetrica A, associata ad una conica.
Modo matriciale di scrivere l'equazione cartesiana.
Coniche degeneri.
Classificazione delle coniche non-degeneri in ellissi, parabole ed iperboli.
Sottomatrice A' di A.
I numeri reali $det(A)$, $det(A')$ e $Tr(A')$ sono invarianti per isometrie.
Applicazione di tali idee per determinare l'equazione di un'ellisse o o di un'iperbole in forma canonica.