V spazio vettoriale $\sqrt{}$ su $\mathbb{R}$ fissato.

$\underline{U, W}$ sottospazi vettoriali di V.

Considero $U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U \ \underline{e} \ v \in W \}$

Un elemento di $U \cap W$ è $0_V$ perché $0_V \in U$ e $0_V \in W$

$\underline{0_V \in U \cap W}$ $\qquad U \cap W$ è un sottospazio vett. di V?

$v_1, v_2 \in U \cap W$ arbitrari. Allora:

$\boxed{\begin{matrix} v_1 \in U \\ v_2 \in U \end{matrix}}$ e $\boxed{\begin{matrix} v_1 \in W \\ v_2 \in W \end{matrix}}$

$\xRightarrow{W \text{ s. sp. vett. di } V} v_1 + v_2 \in W$

$\xRightarrow{U \text{ s. sp. vett. di } V} \underbrace{v_1 + v_2}_{\text{in } V} \in U$ $\qquad$ allora $v_1 + v_2 \in U \cap W$

$v \in U \cap W$ arbitrario $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora

$$\left.\begin{matrix} v \in U \Rightarrow \lambda v \in U \\ v \in W \Rightarrow \lambda v \in W \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda v \in U \cap W$$

Dunque $\underline{U \cap W \text{ è un sottospazio vettoriale di } V}$

$\underline{\text{ESEMPIO}}$ $\quad V = \mathbb{R}^3$

$U \subset V$ sia l'insieme di tutte le soluzioni di $\overbrace{3x + 4y - 5z = 0}^{\text{S.L.O.}}$

$W \subset V$ sia il sottospazio generato da $\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = w$.

Chi è il sottospazio $U \cap W$?

"Esplicito" U $\qquad x = -\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}z$ Dunque l'el.to generico di U è

$$\left(-\frac{4}{3}y + \frac{5}{3}z, y, z\right) = y\overbrace{\left(-\frac{4}{3}, 1, 0\right)}^{u_1} + z\overbrace{\left(\frac{5}{3}, 0, 1\right)}^{u_2}$$

$u_1, u_2$ formano una base di U

ESERCIZIO

Verificare che anche $\underbrace{3u_1}_{u}, \underbrace{3u_2}_{u'}$ è una base di U.

---

Allora per ogni elemento di $U \cap W$ vale una relazione del tipo

$$\underbrace{x_1 \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}}_{u} + \underbrace{x_2 \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}}_{u'} = \underbrace{x_3 \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}}_{w}$$

$\in U$ $\quad$ $\in W$

che trasformo nel S.L.O.:

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ 3x_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_2 = 0}$$

SPIEGA.

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \; R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2 \; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \; R_1 \rightsquigarrow (-1)R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \; R_2 \rightsquigarrow R_2 - 3R_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; R_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2} R_2 \; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; R_1 \rightsquigarrow R_1 + R_2$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ che corrisponde al S.L.O. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Dunque $U \cap W$ è formato solo dal vettore nullo.

Altro metodo di soluzione:

Un generico elemento di $W$ è $\lambda w = \lambda \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{vmatrix}$

Questo apparterrà a U se e solo se le sue componenti verificano l'equazione che definisce U, cioè:

$3x + 4y - 5z = 0$ $\quad$ Questo significa (SPIEGARE):

$$0 = 3(-2\lambda) + 4 \cdot \lambda - \underbrace{5 \cdot 0}_{=0} = -6\lambda + 4\lambda = -2\lambda \qquad -2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Quindi l'unico elemento di W che appartiene anche ad U è $0 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

OSSERVAZIONE L'intersezione di due (o più) sottospazi vettoriali di $V$ contiene sempre almeno $0_V$.

ESEMPIO $V=\mathbb{R}^3$ $U \subset V$ quello dell'esempio precedente.
$W$: l'insieme di tutte le soluzioni di $2x+7y+z=0$
Allora $U \cap W$ è l'insieme di tutte le soluzioni di

$$(*)\begin{cases} 3x+4y-5z=0 \\ 2x+7y+z=0 \end{cases}$$

ESERCIZIO Risolvere questo S.L.O. con l'algoritmo di Gauss.

Variante: la soluzione generale della prima equazione è $(\underbrace{-\frac{4}{3}y+\frac{5}{3}z}_{\text{ad } x}, \underbrace{y}_{\text{ad } y}, \underbrace{z}_{\text{a } z})$. Sostituisco nella seconda equazione

$$2\left(-\frac{4}{3}y+\frac{5}{3}z\right)+7y+z=0 \qquad -\frac{8}{3}y+7y+\frac{10}{3}z+z=0 \;/\cdot 3$$

NB Sto facendo un'op. elementare di tipo b)!

anche qui!

$$-8y+21y+10z+3z=0 \Rightarrow 13y+13z=0 \Rightarrow y+z=0$$

$$\Rightarrow y=-z \quad \text{param. libero.}$$

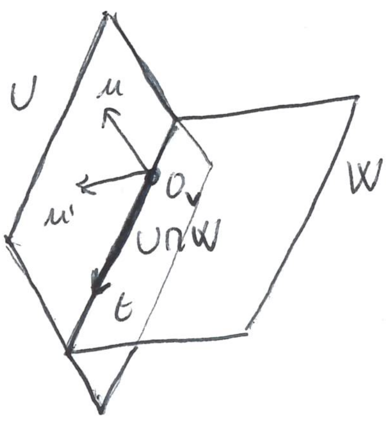
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

pivot.

Quindi la soluzione generale di $(*)$ è

$$\left(\frac{4}{3}z+\frac{5}{3}z, -z, z\right) = \left(\frac{9}{3}z, -z, z\right) = \underline{z(3,-1,1)} \qquad z \in \mathbb{R}$$

Il vettore $\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = t$ è una base di $U \cap W$.




Conosciamo la base $u=\begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$, $u'=\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ di $U$.
$t \in U$ quindi possiamo scrivere $t$ come combinazione lineare di $u$ ed $u'$. Facciamolo.

$t = x_1 u + x_2 u' \Longrightarrow x_1 \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ ← ojo!

Per trovare $x_1, x_2$ basta, quindi, risovere il S.L.

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = 3 \\ \boxed{\begin{array}{ll} 3x_1 & = -1 \\ \quad 3x_2 & = 1 \end{array}} \end{cases}$$

si risolve questo : $x_1 = -\frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{1}{3}$
e si vede se questa soluzione verifica la prima equazione :

$$-4\left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \quad \underline{\text{OK}}$$

<u>IDEA IMPORTANTE</u>

Abbiamo i tre spazi vettoriali $U \cap W \subset U \subset \mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}_c$

Per ciascuno abbiamo una base $\underbrace{\{t\} \quad \{u, u'\} \quad \{e_1, e_2, e_3\}}_{\text{6 vettori in tutto}}$

Spesso è conveniente (per esempio, per semplificare i calcoli) introdurre il minor numero di vettori possibile.
Possiamo farlo sfruttando il "Teorema di completamento ad una base". Nel nostro caso:

| sp. vett. | fam. di vett. indip "I" | fam. di gen. "G" | base |
|---|---|---|---|
| U | $I = \{t\}$ | $G = \{u, u'\}$ | di U $\{t, u\}$ |
| V | $I = \{t, u\}$ <u>ESERCIZIO!</u> | $G = \mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ | di V: $\{t, u, e_1\}$ <u>EXE</u> |

Quindi mi bastano tre vettori!

<u>IDEE</u>

sp. vett.
sottospazi
....

<u>CALCOLI</u>

sp. vett + <u>BASE</u>

Le basi permettono di fare calcoli. sono basi <u>adattate</u> alla situazione che ci interessa..

A partire da due qualsiasi sottospazi $U, W$ di uno sp. vett. $V$ possiamo costruire anche un nuovo sottospazio di $V$

"$U+W$" è solo notazione!!!

$$U+W \overset{\text{def}}{=} \{u+w \mid \forall u \in U, \forall w \in W\}$$

verifico che è sottospazio di $V$

- $0_V \in U$, $0_V \in W \Rightarrow 0_V = 0_V + 0_V \in U+W$ $\quad$ $\underline{0_V \in U+W}$
- Prendo due el.ti di $U+W$ arbitrari $u+w$, $u'+w'$ (dunque $u, u' \in U$, $w, w' \in W$). Allora

$$\underbrace{(u+w)+(u'+w')}_{\text{tutte somme in } V} = u+w+u'+w' = \underbrace{(u+u')}_{\in U}+\underbrace{(w+w')}_{\in W} \in U+W$$

- Sia $u+w \in U+W$ arbitrario, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ arb.

$$\lambda(u+w) = \underbrace{\lambda u}_{\in U} + \underbrace{\lambda w}_{\in W} \in U+W$$

---

Osservo che $\underline{U \subset U+W}$ (è un sottospazio vett. di $U+W$)

Infatti, per ogni $u \in U$ si ha che

$$u = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W} \in U+W$$

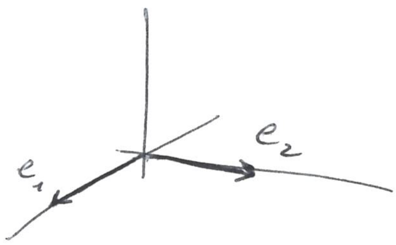
Analogamente si ha $\underline{W \subset U+W}$ sottospazio.

$U+W$ è il più piccolo (risp. "$\subset$") sottospazio vettoriale di $V$ che contiene sia $U$ che $W$.

<u>ESEMPIO</u> $V = \mathbb{R}^3$

$U$ sia il sp. vett generato da $e_1$

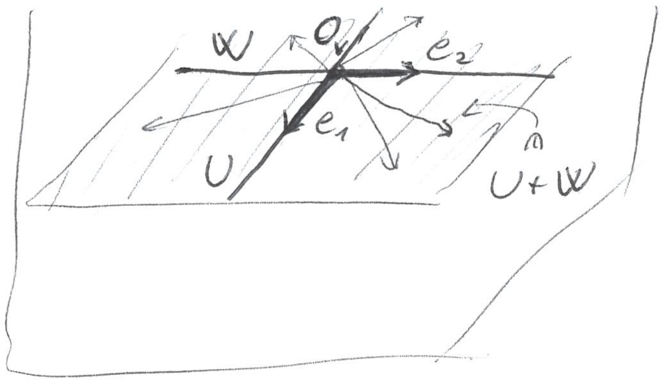
$W$ —— " —— $e_2$



Cioè $U = \{ \lambda e_1 = \begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

e $W = \{ \mu e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{vmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \}$

$$U + W = \{ \lambda e_1 + \mu e_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \left\{ \begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{vmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$




$\mathbb{R}^3 = V$ SPIEGARE

OSSERVAZIONE

In generale $U \cup W$ ("unione") non è un sottospazio vettoriale di $V$. In generale $U \cup W \subsetneq U + W$ SPIEGARE

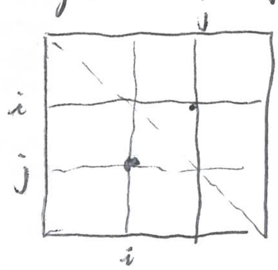
ESEMPIO

[redacted]

$\mathcal{M}(n\times n)$ : spazio vettoriale delle matrici $n\times n$ dunque quadrate ha dimensione $n^2$.

$M \in \mathcal{M}(n\times n)$ è detta m. <u>simmetrica</u> se $m_{ij} = m_{ji}$ $\forall i, \forall j$

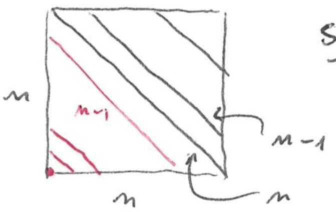
$(m_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ $\iff$ $\boxed{{}^tM = M}$ (SPIEG. "${}^tM$")




La matrice nulla è chiaramente simmetrica

(1) ${}^t(M_1+M_2) = {}^tM_1 + {}^tM_2$ $\qquad {}^t(\lambda M) = \lambda\, {}^tM$ $\qquad M, M_1, M_2 \in \mathcal{M}(n\times n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

EXE $\mathcal{S}(n) \overset{def}{=} \{ M \in \mathcal{M}(n\times n) \mid M \text{ è simmetrica} \}$
è sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(n\times n)$ $\quad \dim(\mathcal{S}(n)) = ?$




SPIEGARE

$$\dim(\mathcal{S}(n)) = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = (n+1)\frac{n}{2}$$

$$\underline{\underline{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

$M$ è detta matrice <u>antisimmetrica</u> se $m_{ij} = -m_{ji}$ $\forall i, \forall j$

$\iff$ $\boxed{{}^tM = -M}$

EXE. $\mathcal{A}(n) \overset{def}{=} \{ M \in \mathcal{M}(n\times n) \mid M \text{ è antisimmetrica} \}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(n\times n)$. $\dim(\mathcal{A}(n)) = (n-1+1)\frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$

---

$\dim(\mathcal{S}(n)) + \dim(\mathcal{A}(n)) = n^2 = \dim(\mathcal{M}(n\times n))$

---

$\mathcal{S}(n) \cap \mathcal{A}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(n\times n)$.

$$M \in \mathcal{S}(n)\cap\mathcal{A}(n) \implies M \underset{M\in\mathcal{S}(n)}{=} {}^tM \underset{M\in\mathcal{A}(n)}{=} -M \implies 2M = 0 \implies M = 0$$

(2) $\boxed{\mathcal{S}(n)\cap\mathcal{A}(n) = \{0\}}$ sottospazio formato dalla sola matrice nulla.

$M \in \mathcal{M}(n \times n)$ qualsiasi $M + {}^tM \in \mathcal{S}(n)$ già visto

$M - {}^tM \in \mathcal{M}(n \times n)$ è antisimmetrica. Infatti:

$${}^t(M - {}^tM) \overset{(1)}{=} {}^tM - {}^t({}^tM) = {}^tM - M = -(M - {}^tM)$$

$$(M + {}^tM) + (M - {}^tM) = 2M \implies M = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}(n)} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}(n)}}_{\in \mathcal{S}(n) + \mathcal{A}(n)}$$

(3) $\boxed{\mathcal{M}(n \times n) = \mathcal{S}(n) + \mathcal{A}(n)}$